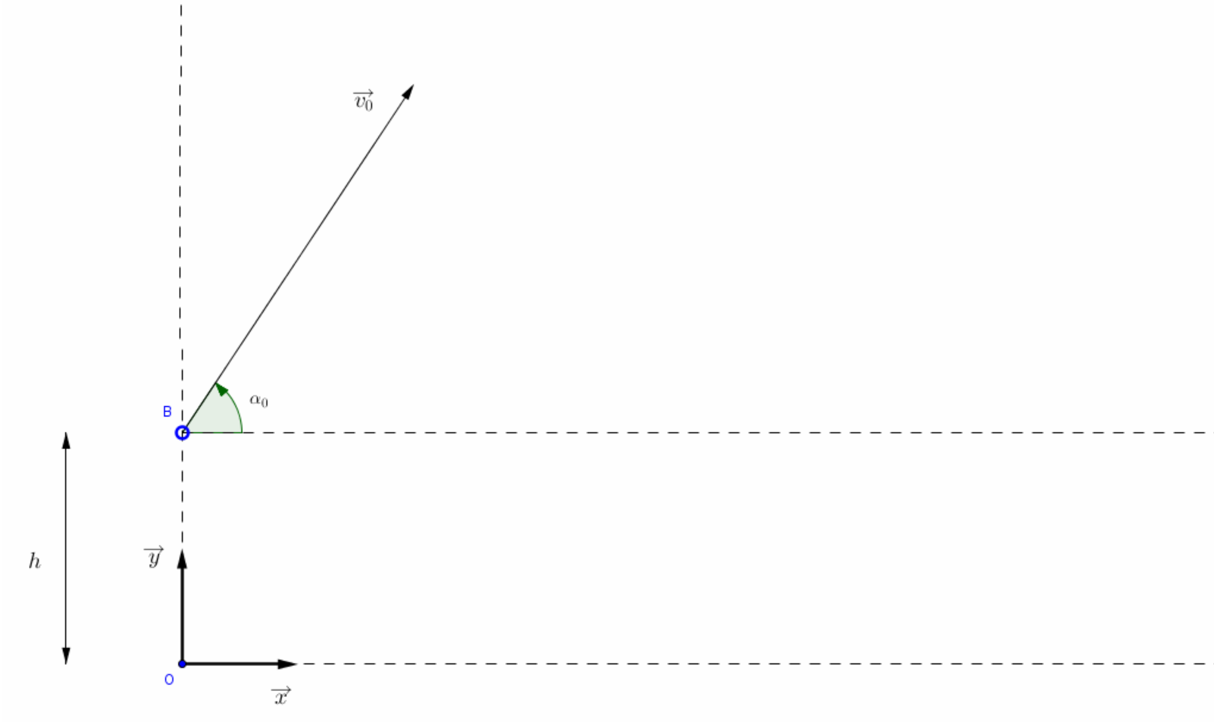

- **Système :** une balle B de masse m.
- **Référentiel terrestre supposé Galiléen** $\Re\left(O,\vec{x},\vec{y}\right)$ (Toutes les grandeurs vectoriels seront données dans ce référentiel).

Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P}=-mg\vec{y}$
- Frottement de l'air (modèle simplifié) : $\vec{F}(t)=-\rho\overrightarrow{v_B}(t)$

Principe fondamental de la dynamique :

$$\boxed{m\overrightarrow{a_B}(t)=\vec{P}+\vec{F}(t)}$$

Vecteur position de B : $\overrightarrow{OB}(t)=\begin{pmatrix} x_B(t) \\ y_B(t) \end{pmatrix}$. On a les relations $\overrightarrow{v_B}(t)=\dfrac{d\overrightarrow{OB}(t)}{dt}=\dfrac{dx_B(t)}{dt}\vec{x}+\dfrac{dy_B(t)}{dt}\vec{y}$ et $\overrightarrow{a_B}(t)=\dfrac{d\overrightarrow{v_B}(t)}{dt}=\dfrac{d^2x_B(t)}{dt^2}\vec{x}+\dfrac{d^2y_B(t)}{dt^2}\vec{y}$.

On a donc, en appliquant le PFD :

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_B(t)}{dt^2}=-\rho\dfrac{dx_B(t)}{dt} \\ m\dfrac{d^2y_B(t)}{dt^2}=-mg-\rho\dfrac{dy_B(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x_B(t)}{dt^2}+\dfrac{\rho}{m}\dfrac{dx_B(t)}{dt}=0 \\ \dfrac{d^2y_B(t)}{dt^2}+\dfrac{\rho}{m}\dfrac{dy_B(t)}{dt}=-g \end{cases}$$

En intégrant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_B(t)}{dt}+\dfrac{\rho}{m}x_B(t)=c_1 \\ \dfrac{dy_B(t)}{dt}+\dfrac{\rho}{m}y_B(t)+gt=c_2 \end{cases}$$

A $t=0$ on a : $\begin{cases} \overrightarrow{v_B}(t=0)=\overrightarrow{v_0}=v_0\cos(\alpha_0)\vec{x}+v_0\sin(\alpha_0)\vec{y} \\ \overrightarrow{OB}(t=0)=\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix}\end{cases}$. Soit, $\begin{cases}\dfrac{dx_B(t=0)}{dt}=v_0\cos(\alpha_0) \\ x_B(t=0)=0\end{cases}$ et $\begin{cases}\dfrac{dy_B(t=0)}{dt}=v_0\sin(\alpha_0) \\ y_B(t=0)=h\end{cases}$.

En remplaçant, pour $t=0$: $\begin{cases} v_0\cos(\alpha_0)=c_1 \\ v_0\sin(\alpha_0)+\dfrac{\rho}{m}\cdot h=c_2\end{cases}$

$$\text{Soit : }\begin{cases}\dfrac{dx_B(t)}{dt}+\dfrac{\rho}{m}x_B(t)=v_0\cos(\alpha_0) \\ \dfrac{dy_B(t)}{dt}+\dfrac{\rho}{m}y_B(t)+gt=v_0\sin(\alpha_0)+\dfrac{\rho}{m}h\end{cases}$$

<u>Equations du mouvement de la balle en fonction du temps (voir équa diff) :</u>

$$\boxed{\begin{cases} x_B(t)=C\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ y_B(t)=A\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)+Bt+h\end{cases}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases}\tau=\dfrac{m}{\rho} \\ C=\tau\cdot v_0\cos(\alpha_0) \\ A=\tau(g\tau+v_0\sin(\alpha_0)) \\ B=-\tau g\end{cases}}$$

<u>On cherche y_B en fonction de x_B :</u>

On isole t : $x_B(t)=C\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\Rightarrow t=-\tau\cdot\ln\left(1-\dfrac{x_B(t)}{C}\right)$

On remplace dans la 2ème eq. : $y_B(x_B)=\dfrac{A}{C}x_B-B\tau\cdot\ln\left(1-\dfrac{x_B}{C}\right)+h\Rightarrow y_B(x_B)=\dfrac{A}{C}x_B-B\tau[\ln(C-x_B)-\ln(C)]+h$

$$\boxed{y_B(x_B)=K_1x_B+K_2\ln(C-x_B)+K_3} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases}K_1=\dfrac{A}{C} \\ K_2=-\tau B \\ K_3=h+\tau B\ln(C)\end{cases}}$$

<u>A quelle abscisse la balle touche le sol ?</u>

$$x_{B_f}+K_4\ln(C-x_{B_f})=K_5 \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases}K_4=\dfrac{K_2}{K_1} \\ K_5=-\dfrac{K_3}{K_1}\end{cases}}$$

$$\boxed{x_{B_f}=K_4\cdot W(K_6)+C} \quad \text{avec} \quad \boxed{K_6=-\dfrac{1}{K_4}e^{-\frac{C+K_5}{K_4}}}$$