

## 5. EXISTENCE DE SOLUTIONS BORNEES

Existence d'une solution pour l'équation suivante:

$$-div(A(x, u)\nabla u) + a_0(x)u = f(x, u, \nabla u)$$

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert borné,  $A(x, u)$  matrice définie à partir des fonctions de Carathéodory i.e.

$$\forall u \text{ fixé}, x \rightarrow A(x, u) \text{ mesurable,}$$

$$u \rightarrow A(x, u) \text{ continue p.p. } x \in \Omega \text{ fixé,}$$

avec

$$|A(x, u)| \leq \beta$$

$$A(x, s)\xi\xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}$$

$$a_0 \in L^\infty(\Omega), a_0 \geq \alpha_0 > 0 \text{ pp dans } \Omega$$

$f(x, s, \xi)$  de Carathéodory tq:

$$|f(x, s, \xi)| \leq (C_0 + C_1|\xi|^2)$$

### Théorème 5.1

Il existe  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  solution de

$$(5.1) \quad -div(A(x, u)\nabla u) + a_0(x)u = f(x, u, \nabla u) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Remarque:** Chaque terme de (5.1) à un sens.

### Démonstration du théorème 5.1

**Première étape :** Approximation

Pour  $\epsilon > 0$ , on définit

$$f^\epsilon(x, u, \xi) = \frac{f(x, u, \xi)}{1 + \epsilon|f(x, u, \xi)|}$$

d'où  $|f^\epsilon| \leq |f|$ ,  $|f^\epsilon| \leq \frac{1}{\epsilon}$ , et on considère le problème approché.

$$(5.2) \quad -div(A(x, u^\epsilon)\nabla u^\epsilon) + a_0 u^\epsilon = f^\epsilon(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon).$$

**Proposition 5.3.** Le problème (5.2) admet au moins une solution  $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ .

**Démonstration :** On applique le théorème de point fixe de Schauder 2.  $\epsilon$  fixé, on considère l'application

$$T : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

$$\bar{v} \rightarrow T(\bar{v}) = v$$

solution de

$$(5.3) \quad -div(A(x, \bar{v})\nabla v) + a_0(x)v = f^\epsilon(x, \bar{v}, \nabla \bar{v}).$$

ça définit une application  $T$  de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  car problème linéaire (unicité de  $v$ ). Donc on applique Schauder avec

$$B = H_0^1(\Omega)$$

$$T : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

$C$  convexe fermé non vide de  $H_0^1(\Omega)$  : une boule définie par l'estimation à priori

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \alpha_0 \int_{\Omega} |v|^2 dx \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |v| dx \leq \frac{\alpha_0}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx + \frac{1}{2\alpha_0} \frac{1}{\epsilon^2} |\Omega|$$

$$C = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega) \setminus \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 = \frac{1}{2\alpha_0} \frac{1}{\epsilon^2} |\Omega|\}$$

$$T : C \rightarrow C$$

$T$  continue (fort dans fort) par le théorème de carathéodory

$T(C)$  précompact?

On prend des  $v_n$  tq:

$$-\operatorname{div}(A(x, \overline{v}) \nabla v_n) + a_0(x) v_n = f^\epsilon(x, \overline{v_n}, \nabla \overline{v_n}) = g_n$$

$g_n$  borné dans  $L^\infty(\Omega)$  en extrayant une sous-suite  $v_n \rightarrow v$ ,  $H_0^1(\Omega)$  fort. En effet

$$\int_{\Omega} A(v_n) \nabla(v_n - v) \cdot \nabla(v_n - v) dx \rightarrow 0$$

**Conclusion :** il existe  $u^\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  solution du problème approché.

**Deuxième étape : Estimation  $H_0^1(\Omega)$ .**

Si on multiplie par  $u^\epsilon$  ça ne marche pas (exo!). On va ( $T = \varphi$ ) donc multiplier par une fonction test  $\varphi(u^\epsilon)$  si  $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $T \in C'(\mathbb{R})$ ,  $T(0) = 0$  alors  $T(v) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  et  $\nabla T(v) = T'(v) \nabla v$ .  
 $(T'(v))$  est défini sans ambiguïtés, voir le Théorème de Stampacchia).

Donc

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A(u^\epsilon) \nabla u^\epsilon \nabla u^\epsilon T'(u^\epsilon) dx + \alpha_0 \int_{\Omega} u^\epsilon T(u^\epsilon) dx \\ \leq \int_{\Omega} (C_0 + C_1 |\nabla u^\epsilon|^2) |T(u^\epsilon)| dx \end{cases}$$

On prend  $T$  tel que  $T$  croissante: d'où  $uT(u) \geq 0$ , et tel que  $\alpha T'(u) - C_1 |T(u)| \geq \frac{\alpha}{2} \forall u$ , ça existe :

exemple :  $T(t) = t \exp \lambda t^2$  avec  $\lambda$  grand.

$$T' = \exp \lambda u^2 \{1 + 2\lambda |u|^2\}.$$

On demande donc

$$\exp \lambda u^2 \{\alpha + 2\lambda \alpha |u|^2 - C_1 |u|\} \geq \frac{\alpha}{2},$$

ok si  $\frac{\alpha}{2} + 2\lambda \alpha |u|^2 - C_1 |u| \geq 0$  ce qui est vrai si  $\lambda$  grand. D'où

$$\frac{\alpha}{2} \int |\nabla u^\epsilon|^2 dx \leq C_0 \int_{\Omega} |T(u^\epsilon)| dx \leq C \quad \text{car } \|u^\epsilon\|_{L^\infty} \leq \frac{C_0}{\alpha_0}$$

donc

$$\|u^\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C.$$

**Troisième étape: convergence forte dans  $H_0^1(\Omega)$**

La convergence faible  $u^\epsilon \rightharpoonup u$   $H_0^1$  ne suffit pas pour passer à la limite (exo!). On démontre la convergence forte en formant l'équation approché sur  $u^\epsilon - u$

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(u^\epsilon) \nabla(u^\epsilon - u)) + a_0(u^\epsilon - u) = f^\epsilon(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) \\ +\operatorname{div}(A(u^\epsilon) \nabla u - a_0 u) \end{cases}$$

On multiplie par  $T(u^\epsilon - u)$ .

N.B:  $u^\epsilon - u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A(u^\epsilon) \nabla(u^\epsilon - u) \nabla(u^\epsilon - u) T'(u^\epsilon - u) dx + \int_{\Omega} a_0(u^\epsilon - u) T(u^\epsilon - u) dx \\ = \int_{\Omega} f(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) T(u^\epsilon - u) dx - \int_{\Omega} A(u^\epsilon) \nabla u \nabla(u^\epsilon - u) dx - \int_{\Omega} a_0 u (u^\epsilon - u) dx, \end{cases}$$

et comme

$$|f^\epsilon(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon)| \leq C_0 + C_1 |\nabla u^\epsilon|^2 \leq C_0 + 2C_1 |\nabla(u^\epsilon - u)|^2 + 2C_1 |\nabla u|^2,$$

d'où : si  $\alpha T' - 2C_1 |T| \geq \frac{\alpha}{2}$ , on a d'après la deuxième étape:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u^\epsilon - u)|^2 dx &\leq \int_{\Omega} (C_0 + 2C_1 |\nabla u|^2) |T(u^\epsilon - u)| dx - \int_{\Omega} A(u^\epsilon) \nabla u \nabla(u^\epsilon - u) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} a_0 (u^\epsilon - u) dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

d'où la convergence forte de  $u^\epsilon$  vers  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .

#### Quatrième étape : Passage à la limite

La démonstration est simple ; car on sait que

$$-div(A(u^\epsilon) \nabla u^\epsilon) + a_0 u^\epsilon = f^\epsilon(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon)$$

et  $|f^\epsilon(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon)| \leq C_0 + C_1 |\nabla u^\epsilon|^2$  qui converge dans  $L^1(\Omega)$  fort, par suite converge p.p. vers  $f(x, u, \nabla u)$  d'où convergence de  $f^\epsilon(x, u^\epsilon, \nabla u^\epsilon) \rightarrow f(x, u, \nabla u)$  dans  $L^1(\Omega)$  fort, et par suite on a l'existence d'une solution  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  tq:

$$-div(A(x, u) \nabla u) + \alpha_0 u = f(x, u, \nabla u).$$

#### Cinquième étape: Estimation $L^\infty(\Omega)$

Enfin reste à monter que la solution  $u$  du problème (5.1) est bornée dans  $L^\infty(\Omega)$

**Proposition** si  $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  vérifie

$$(5.4) \quad -div(A(x, u) \nabla u) + \alpha_0 u = f(x, u, \nabla u),$$

alors

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_0}{\alpha_0}.$$

**Remarque** Il existe des cas de  $u \in H_0^1(\Omega)$  avec  $u \notin L^\infty(\Omega)$  et  $u$  est solution de l'équation. Donc  $u \in L^\infty$  est essentiel pour démontrer le théorème.

#### Démonstration de la proposition

On multiplie l'équation (5.4) par  $T((u - \frac{C_0}{\alpha_0})^+)$

N.B

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \Rightarrow (u - \frac{C_0}{\alpha_0})^+ \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

et donc cette fonction test est admissible

$T$  croissante donc

$$T((u - \frac{C_0}{\alpha_0})^+) \geq 0, \quad T(0) = 0,$$

par suite on peut démontrer facilement que

$$u \leq \frac{C_0}{\alpha_0}.$$

De la même façon, si on considère la fonction test  $T((u - \frac{C_0}{\alpha_0})^-)$ , on démontre aussi facilement que

$$u \geq -\frac{C_0}{\alpha_0}.$$

Ce raisonnement ne marche pas si  $u \notin L^\infty(\Omega)$ .

# EXISTENCE DE SOLUTIONS NON BORNES

## Cas d'une équation avec un terme qui à un bon signe

On va démontrer le résultat d'existence suivant:

**Théorème** soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ ,  $A(x, u)$  une fonction de Carathéodory, borné coercive i.e.  $|A(x, u)| \leq \beta$ ,  $A(x, u) \geq \alpha I$ ,  $\alpha > 0$ , soit  $g(x, u)$  une fonction de Carathéodory qui vérifient:  $g(x, u)u \geq 0$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$  p.p.  $x \in \Omega$ ,  $|g(x, u)| \leq h_t(x)$ ,  $\forall u$ ;  $|u| \leq t$ ,  $h_t \in L^1(\Omega)$ ,  $\forall t > 0$  fixé.

On se donne  $f \in H^{-1}(\Omega)$  Alors il existe  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que:

$$(1) \quad \begin{cases} g(x, u) \text{ et } ug(x, u) \in L^1(\Omega), \\ -\operatorname{div}((Ax, u)\nabla u) + g(x, u) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

### Commentaires

**1-** Pour  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $g(x, u)$  n'a aucune raison pour qu'elle soit dans  $L^1(\Omega)$ .  
 $g(x, u)$  mesurable et par l'équation  $g(x, u) \in L^1(\Omega)$

### 2- Lemme

$T \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  et si  $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , alors

$$\langle T, w \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} Tw \, dx$$

$$T = g(x, u) \in H^{-1} \cap L^1,$$

donc on a:

$$\int_{\Omega} A(x, u) \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} g(x, u) v = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

**Corollaire** Si  $u$  est la solution donnée par le théorème, on a

$$\int_{\Omega} A(x, u) \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} g(x, u) v = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

### Démonstration

On choisit comme fonction test  $v = T_k(u) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , alors

$$\int_{\Omega} A(x, u) \nabla u \nabla T_k(u) + \int_{\Omega} g(x, u) T_k(u) = \langle f, T_k(u) \rangle$$

quand  $k$  tend vers  $+\infty$  alors  $T_k(u)$  tend vers  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$  fort  
 $g(x, u) T_k(u)$  tend vers  $g(x, u)u$  p.p, donnée par  $g(x, u(x))u(x) \in L^1(\Omega)$  d'après le théorème de Lebesgue.

### Démonstration du théorème d'existence

#### Première étape: Apporroximation et estimation à priori

Pour  $\varepsilon > 0$ , on pose :

$$g_\varepsilon(x, s) = \frac{g(x, s)}{1 + \varepsilon |g(x, s)|},$$

$g_\varepsilon$  est une fonction de Carathéodory et elle vérifie  $|g_\varepsilon| \leq |g|$  et  $|g_\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ .

Maintenant on considère le problème approché

$$(1_\varepsilon) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} A(x, u^\varepsilon) \nabla u^\varepsilon + g_\varepsilon(x, u^\varepsilon) = f \\ u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

d'après le théorème du point fixe de Schauder, on peut démontrer (exercice) qu'il existe au moins une solution  $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  du problème approché  $(1_\varepsilon)$ .

On multiplie la première équation dans  $(1_\varepsilon)$  par  $u^\varepsilon$  et on intègre sur  $\Omega$ , on obtient:

$$(2) \quad \alpha \int_{\Omega} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega} g_\varepsilon(x, u^\varepsilon) u^\varepsilon dx = \langle f, u^\varepsilon \rangle.$$

Comme le deuxième terme du premier membre de (2) est positive et d'après la condition d'un seul coté on a

$$(3) \quad \|u^\varepsilon\|_{H_0^1} \leq \|f\|_{H^{-1}} \leq C,$$

et comme le premier terme de (2) est positif aussi et d'après (3), on obtient

$$(4) \quad \int_{\Omega} g_{\varepsilon}(x, u^{\varepsilon}) u^{\varepsilon} dx \leq C.$$

### Deuxième étape: Passage à la limite

D'après (3) en extrayant une sous suite on a  $u^{\varepsilon} \rightharpoonup u$   $H_0^1(\Omega)$  faible et par Rellich  $u^{\varepsilon} \rightarrow u$   $L^2(\Omega)$  fort et p.p dans  $\Omega$

Comme  $g_{\varepsilon}$  est une fonction de Carathéodory et d'après la condition d'un seul coté et l'estimation (3) et le lemme du Fatou, on a  $g_{\varepsilon}(x, u^{\varepsilon}) u^{\varepsilon} \rightarrow g(x, u) u$  p.p  $\Omega$ . et  $g(x, u) u \in L^1(\Omega)$ .

Montrons maintenant que  $g(x, u)$  est dans  $L^1(\Omega)$ ,  $g(x, u)$  est mesurable et on a

$$\int_{\Omega} |g(x, u)| dx \leq \int_{\{|u| \leq M\}} |g(x, u)| dx + \int_{\{|u| \geq M\}} |g(x, u)| dx,$$

le premier terme du second membre est fini d'après l'hypothèse sur  $g$ .

En ce qui concerne l'autre terme, comme  $|u| \geq M$  on a  $\frac{1}{|u|} \leq \frac{1}{M}$ , donc

$$|g(x, u)| = \frac{|u| |g(x, u)|}{|u|} = \frac{u g(x, u)}{|u|} \leq \frac{1}{M} u g(x, u)$$

donc le deuxième terme est aussi fini et par suite  $g(x, u) \in L^1(\Omega)$ .

Le passage à la limite dans l'équation

$$-\operatorname{div}(A(x, u_{\varepsilon}) \nabla u_{\varepsilon}) + g_{\varepsilon}(x, u_{\varepsilon}) = f$$

permet d'obtenir, comme  $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u$  faible dans  $H_0^1(\Omega)$  et p.p. dans  $\Omega$

$$-\operatorname{div}(A(x, u_{\varepsilon}) \nabla u_{\varepsilon}) \rightharpoonup -\operatorname{div}(A(x, u) \nabla u) \text{ faible dans } H^{-1}(\Omega)$$

et

$$g_{\varepsilon}(x, u_{\varepsilon}) \rightarrow g(x, u) \text{ p.p. dans } \Omega,$$

on peut démontrer facilement, comme on a démontré que  $g(x, u) \in L^1(\Omega)$ , que  $g_{\varepsilon}(x, u_{\varepsilon})$  est borné dans  $L^1(\Omega)$ , mais malheureusement tout cela ne fait pas  $g_{\varepsilon}(x, u_{\varepsilon}) \rightarrow g(x, u)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et donc on ne peut pas passer à la limite dans l'équation.

**Attention:**

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{\varepsilon} \rightarrow f \text{ p.p. dans } \Omega, \\ f^{\varepsilon}, f \in L^1(\Omega), \\ f^{\varepsilon} \text{ bornée dans } L^1(\Omega) \end{array} \right\},$$

ne suffit pas pour que  $f^{\varepsilon} \rightarrow f$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Il manque l'équintégrabilité de  $f^{\varepsilon}$ .**

**Définition:** On dit que la suite  $f^{\varepsilon}$  est équintégrable si

$$\forall \eta, \exists \delta > 0, \quad \text{tq: } |E| \leq \delta \implies \int_E |f^{\varepsilon}| dx \leq \eta.$$

**Lemme:** Si

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{\varepsilon} \rightarrow f \text{ p.p. dans } \Omega, \\ f^{\varepsilon}, f \in L^1(\Omega), \\ f^{\varepsilon} \text{ bornée dans } L^1(\Omega), \\ f^{\varepsilon} \text{ est équintégrable} \end{array} \right\},$$

alors  $f^{\varepsilon} \rightarrow f$  dans  $L^1(\Omega)$  fort.

La démonstration du lemme est basée sur le lemme de Fatou et sur le théorème d'Egorov. Donc d'après ce lemme et si on démontre que  $g_{\varepsilon}$  est équintégrable (qui est facile à obtenir), on obtient la convergence de  $g_{\varepsilon}$  dans  $L^1(\Omega)$  fort et par suite le passage à la limite dans l'équation est facile à obtenir