

- BRULE Adrien
- LEY Martin
- DEJEANTE Christelle
- BARLA Arthur
- ROUSSEAU Poerani



PROJET CALIBRATION



Partie I : Surface de volatilité

1. Après avoir importé les valeurs des prix des calls SPX pour une quarantaine de strikes et 5 maturités, nous avons interpolé les calls dont les prix étaient nuls.

La formule d'interpolation pour $K_1 \leq K \leq K_2$ est la suivante :

$$C(t, T, K) = C_1(t, T, K_1) * (K_2 - K) + C_2(t, T, K_2) * \frac{(K - K_1)}{(K_2 - K_1)}$$

Dans tout le projet, les valeurs en vertes sont les valeurs interpolées.
Cependant il n'est pas possible d'interpoler les prix dont la première valeur est nulle.
Dans tout le projet nous prendrons r , le taux d'intérêt égal à 0.

Méthode de Newton Raphson :

Nous avons fixé une volatilité à $\sigma^* = 0,5$. Puis nous avons créé la fonction f telle que :

$$f(S_0, K, T, \sigma^*) = C(t, T, K, I(T, K)) - C(t, T, K, \sigma^*)$$

Où $I(T, K)$ est la volatilité implicite et :

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^{*2}T}{\sigma^*\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma^*\sqrt{T}$$

$$C(t, T, K, \sigma^*) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K \mathcal{N}(d_2)$$

D'où :

$$f'(S_0, K, T, \sigma^*) = -dC(t, T, K, \sigma^*)$$

Avec :

$$dC(t, T, K, \sigma^*) = S_0 \sqrt{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

Puis tant que $|f(S_0, K, T, \sigma^*)| > 0,001$

On réalise cette opération :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(S_0, K, T, \sigma_n)}{f'(S_0, K, T, \sigma_n)}$$

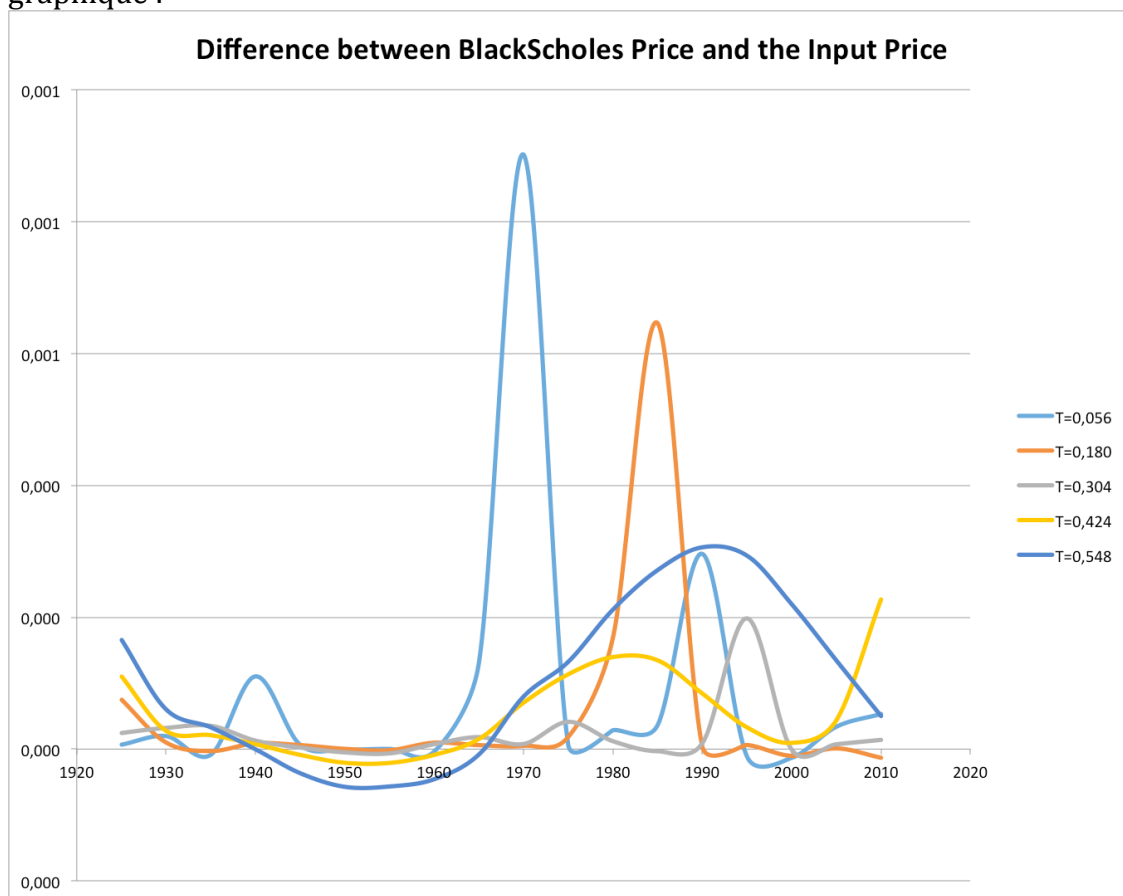
Enfin on obtient :

$$I(T, K) = \sigma_{n+1}$$

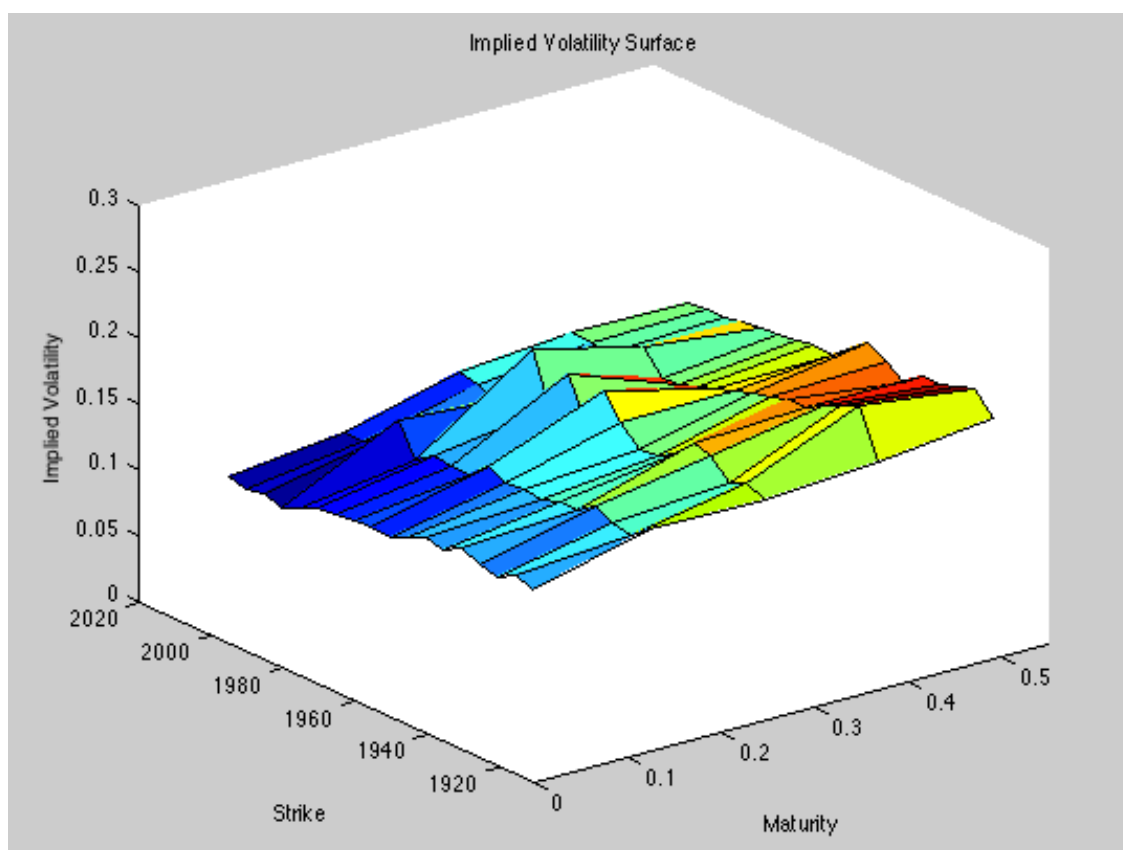
Afin de vérifier la cohérence des résultats, nous calculons la différence :

$$C(t, T, K, I(T, K)) - C_{importé}$$

Nos résultats sont très proches de 0 comme nous pouvons le constater sur ce graphique :



2. Nous utilisons ensuite Matlab afin de tracer la surface de volatilité implicite. Le code se trouve dans le fichier « **SurfaceDeVolImpl.m** ». Nous obtenons :



3. Pour les 15 premiers strike à cause des valeurs nulles de l'importation, nous avons une volatilité implicite négative. La volatilité décroît en fonction du strike, cependant pour les très grands strikes, la volatilité décroît très fortement. Comme la surface de volatilité est correcte mais seulement dans le cas où l'option est proche de la monnaie, on peut en conclure que le modèle de Black-Scholes est suffisant mais seulement dans le cas où l'option est à la monnaie.

Partie II : Volatilité locale et diffusion implicite de Dupire

1. Afin de calculer les dérivées, sur Excel, nous utilisons les formules de différence finie :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{C(T + \Delta t, K) - C(T, K)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \frac{C(T, K + \Delta K) - C(T, K)}{\Delta K}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{C(T, K + \Delta K) - 2C(T, K) + C(T, K - \Delta K)}{\Delta K^2}$$

Ainsi nous pouvons implémenter la formule de Dupire :

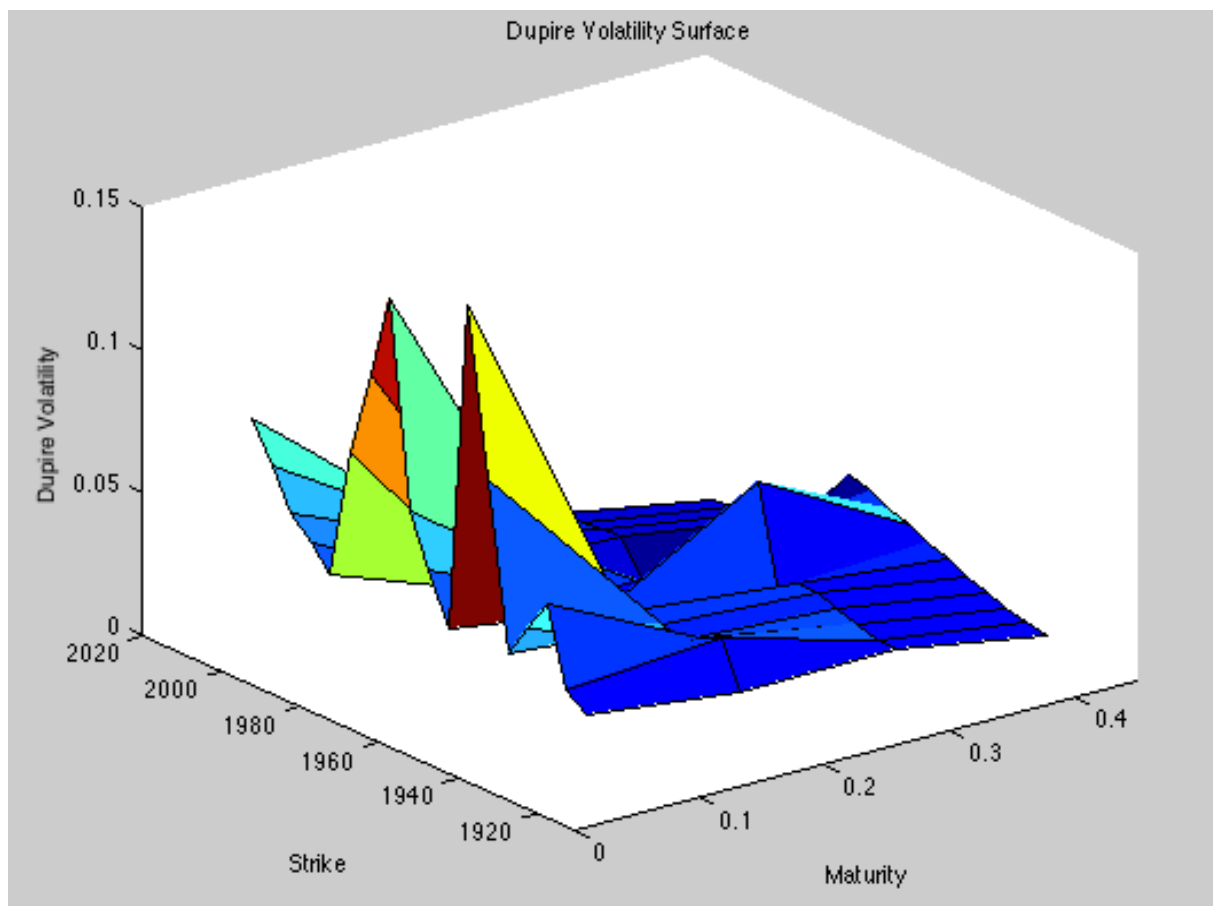
$$\sigma(T, K) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}}$$

2. Comme précédemment, nous utilisons la formule d'interpolation pour $K_1 \leq K \leq K_2$ suivante :

$$\sigma(T, K) = \sigma_1(T, K_1) * (K_2 - K) + \sigma_2(T, K_2) * \frac{(K - K_1)}{(K_2 - K_1)}$$

3. Nous utilisons une nouvelle fois Matlab afin d'obtenir la surface de volatilité de Dupire. Le code se trouve dans le fichier : « **SurfaceDeVolDupire.m** ».

Nous obtenons :



La forme de la surface de volatilité obtenue n'est pas correcte. Lorsque nous calculons et traçons cette surface de volatilité, nous supposons une continuité des prix d'options, ce qui est faux. $\sigma(T, K)$ ne peut pas être une fonction contenant des dérivés car les prix ne sont pas continus.

Il est donc déconseillé d'utiliser ce modèle en pratique pour pricer des options.

Partie III : Calibration du modèle de SABR

1. Nous utilisons Matlab, le nom du fichier est : « **SABRFunction.m** ». Afin d'implémenter une méthode permettant de pricer un option call européenne de strike K, et de maturité T, nous réalisons le Monte Carlo suivant :

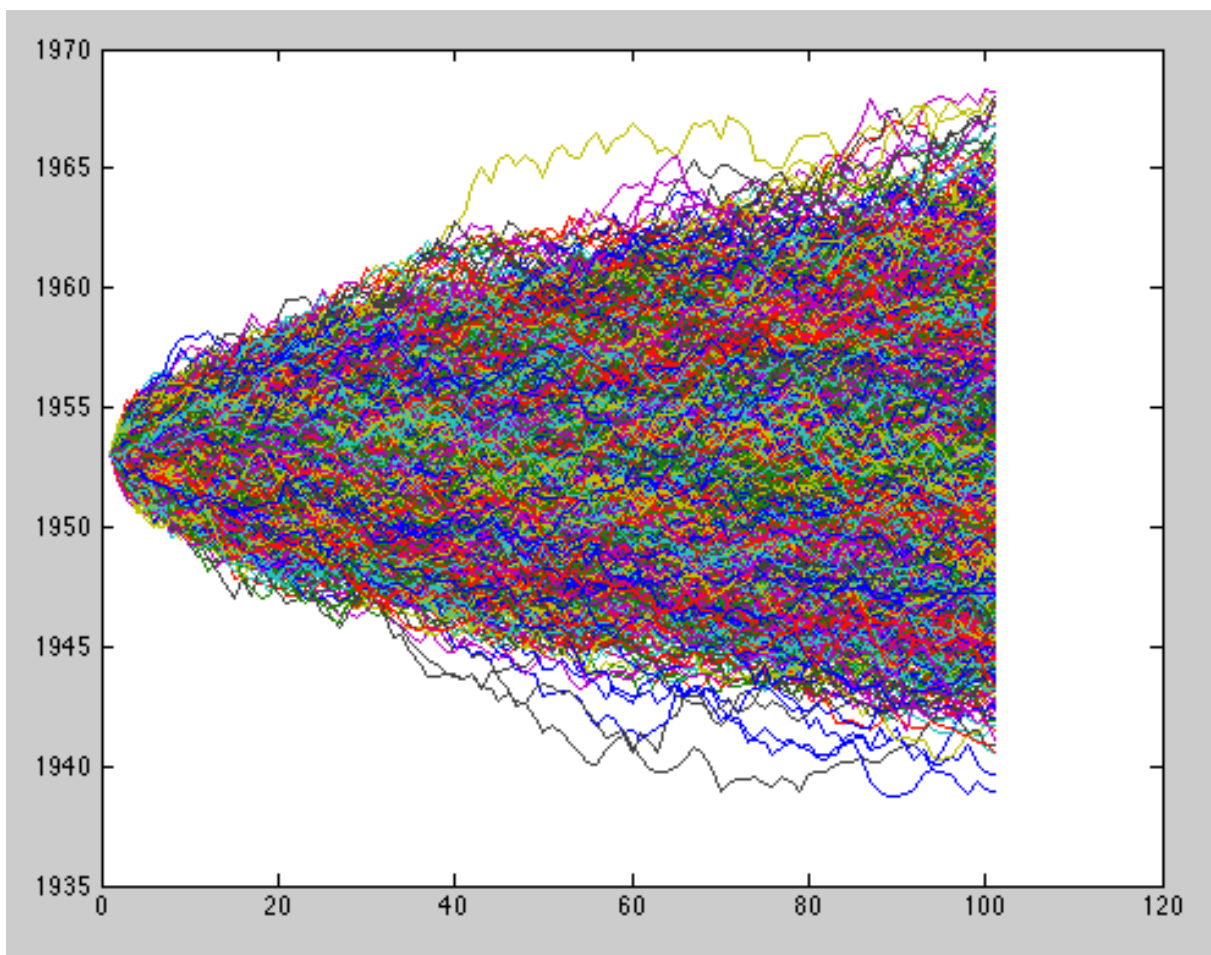
$$F_{t+\Delta} = F_t + \sigma_t F_t^\beta Z_1 \sqrt{\Delta}$$

$$\sigma_{t+\Delta} = \sigma_t \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\Delta + vZ_2\sqrt{\Delta}\right)$$

$$\sigma_0 = \alpha ; F_0 = F ; Z_1 \text{ et } Z_2 \text{ sont corrélés par } \rho$$

$$F_t = S_t e^{-rt} \text{ mais } r = 0 \text{ donc } F_t = S_t$$

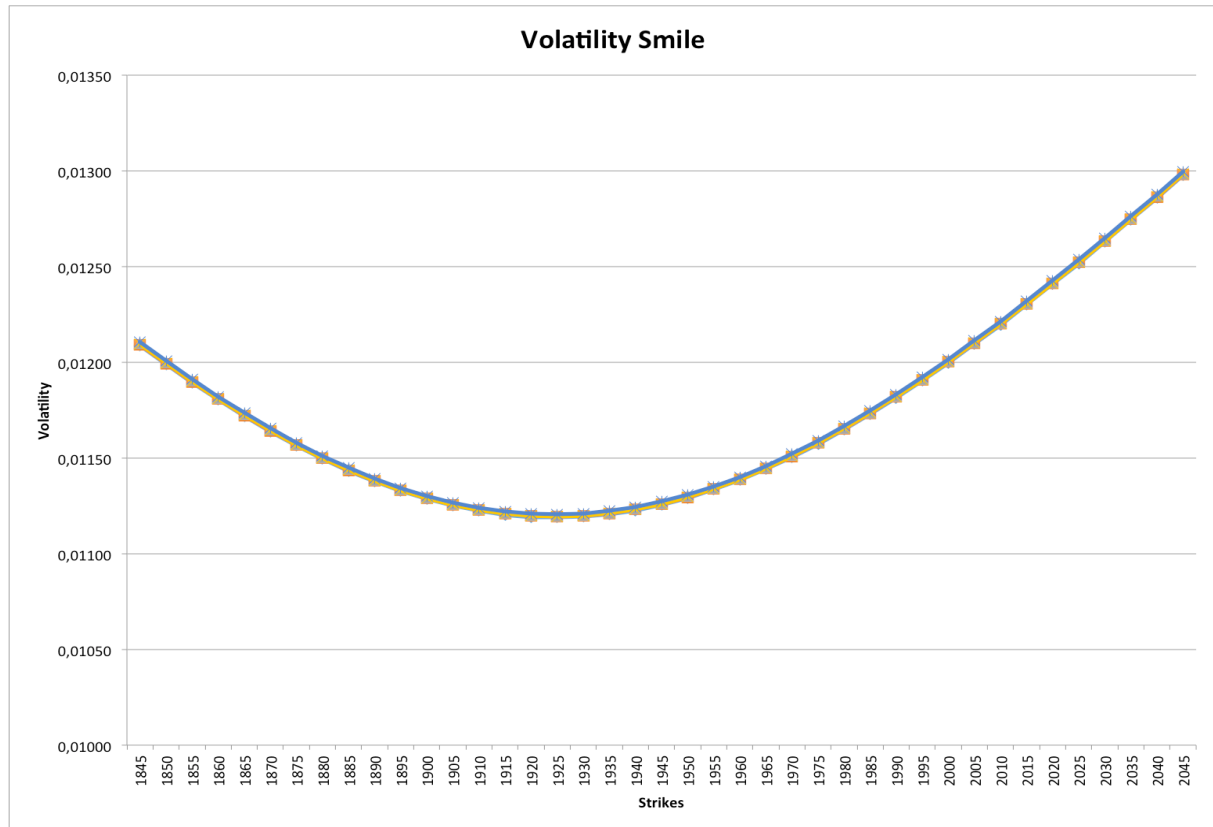
Grace à ce Monte Carlo, nous pouvons, en faisant la moyenne des payoffs obtenir le prix cherché :



2. Nous revenons sur Excel et nous implémentons la formule de la volatilité implicite dans le modèle de SABR. Nous pouvons maintenant tracer les Smiles de volatilité pour les différentes maturités avec les paramètres suivants :

t	0
alpha	0,2
beta	0,5
mu	0,5
rau	0,2

Nous obtenons :



Nous étudions à présent l'influence des différents paramètres sur le Smile.

- α : quand il augmente, le smile devient plus accentué tout en gardant le même minimum.
- β : quand il augmente, le smile subit une translation vers le haut et la partie gauche du smile semble subir une rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.
- ν : quand il augmente, nous avons juste une translation vers le haut du smile.
- ρ : quand il augmente, le smile a tendance à devenir une droite.

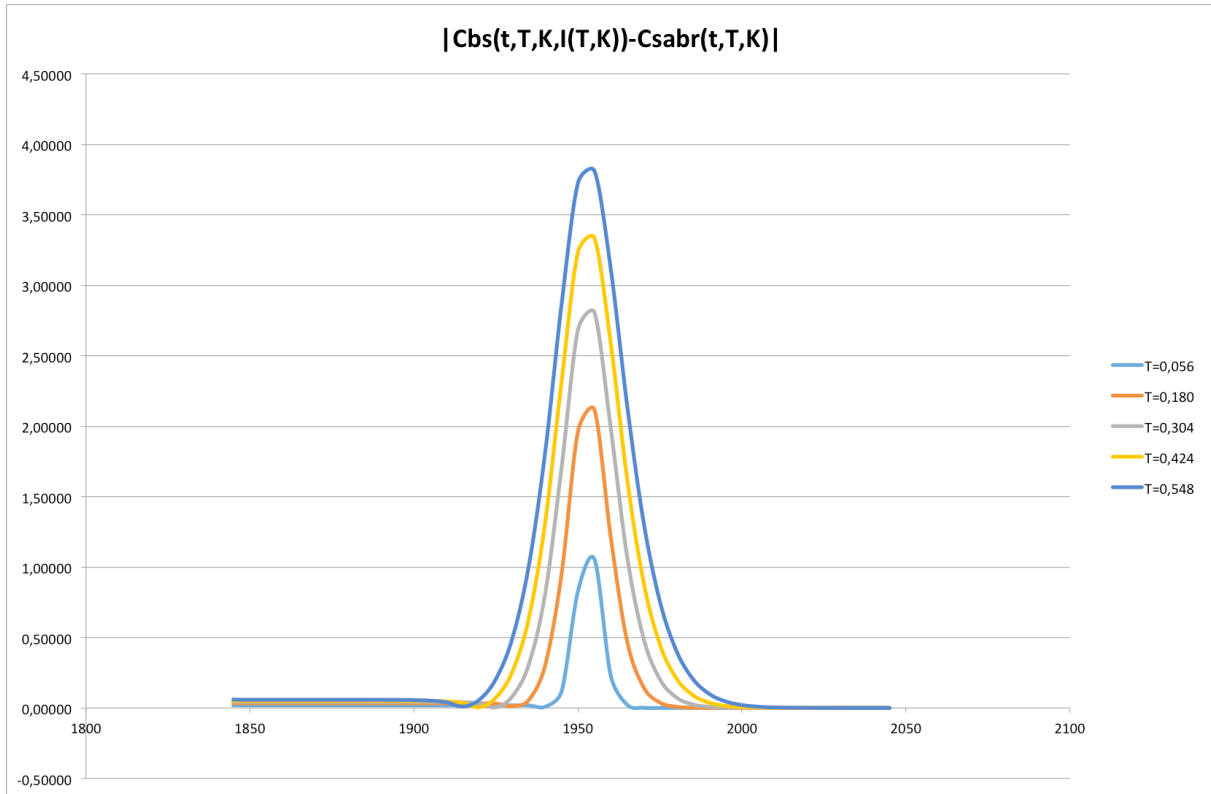
3. Dans le but de réaliser le Monte Carlo pour toutes les maturités et tous les strikes, nous créons la fonction : « **FinalSABR.m** ».

Attention, cette fonction réalise 10 000 simulations pour un temps discrétiser 100 fois et ce pour 41 strikes et 5 maturités soit environ $(10\,000 \times 100 \times 41 \times 5 = 205\,000\,000)$ opérations).

Grace à cette fonction il nous est possible d'obtenir la matrice des prix Monte Carlo cherchés et de la copier coller sur Excel. Toujours sur Excel, nous utilisons le modèle de Black-Scholes et remplaçons la volatilité « constante » par celle que nous venons de calculer. Ainsi il est possible d'observer la différence suivante :

$$C_{BS}(t, T, K, I(T, K)) - C_{SABR}(t, T, K) \approx 0$$

Comme nous l'attendions, nos résultats sont proches de 0. Voici les courbes de cette différence en valeur absolue.



4. Afin de pouvoir réaliser la calibration du modèle de SABR sur matlab, nous avons d'abord implémenter la formule de la volatilité implicite du modèle de SABR dans la fonction : « **Difference.m** ». Puis toujours dans cette même fonction, on crée la formule de Black Scholes dans laquelle on intègre cette volatilité implicite du modèle de SABR. Enfin la fonction calcule :

$$difference = (C_{BS}(t, T, K, I(T, K)) - ImportedPrice)^2$$

Dans le but de calculer cette différence pour toutes les maturités et tous les strikes, nous créons la fonction : « **Calibration.m** » qui somme toutes ces différences.

Nous n'avons pas réussi à calibrer le modèle malgré les multiples tentatives sur matlab. Enfin en traçant la surface de volatilité SABR grâce au fichier : « **SurfaceDeVolSABR.m** » et en superposant cette volatilité avec la volatilité implicite de la première partie, on remarque un écart assez important entre les volatilités ce qui explique la très grande erreur que nous obtenons.