Endomorphisme d'un espace de fonctions.

Préliminaires : ces résultats pourront servir dans la partie III.

Soit ω un réel non nul. On définit la matrice :

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 2\frac{\sin\omega}{\omega} & 0 & 0 & -2\frac{\cos\omega}{\omega} + 2\frac{\sin\omega}{\omega^2} \\ 0 & 2\frac{\sin\omega}{\omega} & 2\frac{\cos\omega}{\omega} - 2\frac{\sin\omega}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\sin\omega}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{\sin\omega}{\omega} \end{pmatrix}$$

P.1. Déterminer le rang de cette matrice, en discutant selon les valeurs de ω.

P.2. Résoudre (selon les cas) le système $A_\omega \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Problème.

Dans ce problème, E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout élément f de E on note $T(f)$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$

Première partie : un exemple.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer $T(g)$. Étudier rapidement les variations et les limites de $T(g)$ et tracer les courbes représentatives de $T(g)$ et de g dans le plan muni d'un R.O.N.

Deuxième partie : étude de T.

II.1. Montrer que, pour tout élément f de E, l'application $T(f)$ appartient à E et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de $T(f)$ et montrer que $T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II.2. On note T l'application de E dans lui-même définie par $f \mapsto T(f)$.

II.2.1. Montrer que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E (c-à-d une application linéaire de E dans E.)

II.2.2. T est-elle une application surjective ?

II.2.3. Soit l'ensemble F des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, 2-périodiques et de valeur moyenne nulle c-à-d :

$$F = \left\{ f \in E \quad / \quad \forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = 0 \right\}.$$

Exhiber une fonction non nulle appartenant à F puis montrer que F est un SEV de E et que $F = \operatorname{Ker} T$.

II.3. On suppose dans cette question que f est une fonction de E, bornée sur $\mathbb{R}$.

II.3.1. Montrer que $T(f)$ est également une fonction bornée.

II.3.2. Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |T(f)(x) - T(f)(y)| \leq K\,|x-y|\,.$$

II.4. Montrer que si f est une fonction périodique de E, alors $T(f)$ est aussi périodique sur $\mathbb{R}$.

II.5. Déterminer la parité éventuelle de $T(f)$ en fonction de la parité de f.

Troisième partie : étude d'une restriction de T.

On rappelle que T est un endomorphisme de E (ie une application linéaire de E dans E). Soit ω un réel non nul ; on note ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et ϕ_4 les fonctions de E définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \phi_1(x) = \cos(\omega x), \quad \phi_2(x) = \sin(\omega x), \quad \phi_3(x) = x\cos(\omega x), \quad \phi_4(x) = x\sin(\omega x).$$

On note F_ω le sous-espace vectoriel de E engendré par $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$.

III.1. Montrer que $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est une base de F_ω. On la note désormais $\mathcal{B}$.

III.2. Calculer $T(\phi_1)$, $T(\phi_2)$, $T(\phi_3)$ et $T(\phi_4)$, montrer qu'ils s'expriment dans la base $\mathcal{B}$, et en déduire que $T(F_\omega)$ est un SEV de F_ω.

III.3. Dans la suite du problème, on note T_ω la restriction de T à F_ω définie par :

$$T_\omega : \begin{array}{rcl} F_\omega & \to & F_\omega \\ f & \mapsto & T(f) \end{array}$$

III.3.1. Justifier brièvement que T_ω est un endomorphisme de F_ω.

III.3.2. Écrire la matrice M_ω de la famille $(T_\omega(\phi_1), T_\omega(\phi_2), T_\omega(\phi_3), T_\omega(\phi_4))$ dans la base $\mathcal{B}$.

III.3.3. Donner le rang de M_ω et déterminer une base de $\mathrm{Im}(T_\omega)$. (On discutera selon la valeur de ω, ω étant toujours un réel non nul).

III.3.4. Pour quelles valeurs de ω, (T_ω) est-elle surjective ?

III.4. On suppose dans cette question qu'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\omega = k\pi$.
Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(T_\omega)$.