Notations et rappels :

Si M est une matrice, ${}^tM$ désigne sa transposée.

Si $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\quad U\,{}^tU$ est la matrice $\begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux matrices colonne de de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\quad {}^tXX$ est le réel $xx' + yy' + zz'$.

Ker ${}^tU$ désigne l'ensemble des matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$ux + vy + wz = 0.$$

Enfin, pour tout n entier naturel, I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tous n et p entiers naturels, $O_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer le rang, l'image et le noyau de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Soit $\vec{u} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. On note $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée et on pose $T = U\,{}^tU$.

On note t l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à T.

2.a. Selon les cas, déterminer Im T et Ker T.
S'il s'agit d'une droite vectorielle (c-à-d un SEV de dimension 1), on en donnera une base et s'il s'agit d'un plan vectoriel (un SEV de dimension 2), on en donnera une équation.

2.b. Montrer que ${}^tUU$ est un réel positif. On note λ ce réel. À quelle condition sur $\vec{u}$, λ est-il nul ?

2.c. Déduire de la question précédente que : $\quad T^2 = \lambda T$.

On suppose désormais que $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul.

3. **3.a.** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $TX = \alpha X$.
Montrer que $\alpha = 0$ ou $\alpha = \lambda$.

3.b. Montrer que Ker $(T - \lambda I_3) =$ Im T.

3.c. Déterminer les réels α vérifiant :

il existe X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $TX = \alpha X$.

Pour chacun d'eux déterminer Ker $(T - \alpha I_3)$.

3.d. Montrer qu'en juxtaposant une base de Ker t et une base de Im t , on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice de t dans une telle base.

3.e. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $T = PDP^{-1}$.
Exhiber une telle matrice D.

4. On pose $V = \begin{pmatrix} 0 & w & -v \\ -w & 0 & u \\ v & -u & 0 \end{pmatrix}$.

4.a. Déterminer le rang de V et son noyau.

4.b. Que peut-on dire de ${}^tV$?

4.c. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une matrice colonne non nulle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $VX = \alpha X$.
Montrer en calculant ${}^tX\,{}^tVX$ de deux façons différentes que $\alpha = 0$.

5. Calculer les matrices $S = {}^tVV$ et $\Omega = \lambda I_3 - S$.

6. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $PS = DP$.