Soit **G(x) =** $\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d}$

### 1. Calculez $\boldsymbol{G(x-\lambda)}$ et regrouper les monômes de même degré

- Développons G(x) pour x= $(x-\lambda)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a(x-\lambda)^3$ | + | $b(x-\lambda)^2$ | + | $c(x-\lambda)$ | + | $d$ |
| $a[(x-\lambda)(x-\lambda)^2]$ | + | $b(x^2-2\lambda x+\lambda^2)$ | + | $cx-c\lambda$ | + | $d$ |
| $a[(x-\lambda)(x^2-2\lambda x+\lambda^2)]$ | + | $bx^2-2b\lambda x+b\lambda^2$ | + | $cx-c\lambda$ | + | $d$ |
| $a[(x^3-2\lambda x^2+\lambda^2 x)-\lambda x^2+2\lambda^2 x-\lambda^3]$ | + | $bx^2-2b\lambda x+b\lambda^2$ | + | $cx-c\lambda$ | + | $d$ |
| $ax^3-2a\lambda x^2+a\lambda^2 x-a\lambda x^2+2a\lambda^2 x-a\lambda^3$ | + | $bx^2-2b\lambda x+b\lambda^2$ | + | $cx-c\lambda$ | + | $d$ |
| $ax^3-3a\lambda x^2+3a\lambda^2 x-a\lambda^3$ | + | $bx^2-2b\lambda x+b\lambda^2$ | + | $cx-c\lambda$ | + | $d$ |

$$ax^3-3a\lambda x^2+3a\lambda^2 x-a\lambda^3+bx^2-2b\lambda x+b\lambda^2+cx-c\lambda+d$$

- Classons par monômes de même degré :

$$[ax^3-a\lambda^3]+\left[(\boldsymbol{-3a\lambda x^2+bx^2})+b\lambda^2\right]+[3a\lambda^2 x-2b\lambda x+cx]-c\lambda+d$$

### 2. Déduire que G(x) ne comporte pas de monômes en $\boldsymbol{x^2 si\ et\ seulement\ si\ \lambda=(\frac{b}{3a})}$

- Calculons l'expression $(\boldsymbol{-3a\lambda x^2+bx^2})$ pour $\lambda=(\frac{b}{3a})$ :

$$\boldsymbol{-3a\lambda x^2+bx^2} = -3a\left(\frac{b}{3a}\right)x^2+bx^2=-bx^2+bx^2=\mathbf{0}$$

$(-3a\lambda+b)x^2$ = 0 est une équation de la forme $ax^2$ qui a pour solution a=0 ou x=0 et seul $\lambda=(\frac{b}{3a})$ permet de faire disparaitre les monômes contenant des $x^2$. On utilise donc cette simplification pour faire disparaitre les $x^2$.

### 3. Montrez alors que $\boldsymbol{G(x-\frac{b}{3a})}$ = $\boldsymbol{ax^3-3(\frac{3ac-b^2}{9a})x+\frac{2b^3+27a^2d-9ab^2}{27a^2}}$

- Soit $\lambda=(\frac{b}{3a})$
- Classons les termes de $G(x-\lambda)$ :

$$[ax^3-a\lambda^3]+b\lambda^2+[3a\lambda^2 x-2b\lambda x+cx]-c\lambda+d$$
$$ax^3-2b\lambda x+cx+3a\lambda^2 x-a\lambda^3+b\lambda^2-c\lambda+d$$

- Remplaçons :

$$ax^3-2b(\frac{b}{3a})x+cx+3a(\frac{b}{3a})^2x-a(\frac{b}{3a})^3+b(\frac{b}{3a})^2-c(\frac{b}{3a})+d$$

$$ax^3 - \frac{2b^2}{3a}x + \frac{3ac}{3a}x + \frac{3ab^2}{9a^2}x - a(\frac{b}{3a})^3 + b(\frac{b}{3a})^2 - c(\frac{b}{3a}) + d$$

$$ax^3 - \frac{2b^2}{3a}x + \frac{3ac}{3a}x + \frac{b^2}{3a}x - a(\frac{b}{3a})^3 + b(\frac{b}{3a})^2 - c(\frac{b}{3a}) + d$$

$$ax^3 - 3x(\frac{2b^2}{9a} - \frac{3ac}{9a} - \frac{b^2}{9a}) - a(\frac{b}{3a})^3 + b(\frac{b}{3a})^2 - c(\frac{b}{3a}) + d$$

$$ax^3 - 3(\frac{b^2 - 3ac}{9a})x - \frac{ab^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{3abc}{9a^2} + \frac{27a^2d}{27a^2}$$

$$ax^3 - 3(\frac{b^2 - 3ac}{9a})x - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{9abc}{27a^2} + \frac{27a^2d}{27a^2}$$

$$ax^3 - 3\left(\frac{b^2 - 3ac}{9a}\right)x + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}$$

Après maintes vérifications nous n’arrivons pas à tendre vers la forme voulue à savoir :

$$\boldsymbol{ax^3 - 3(\frac{3ac - b^2}{9a})x + \frac{2b^3 + 27a^2d - 9ab^2}{27a^2}}$$