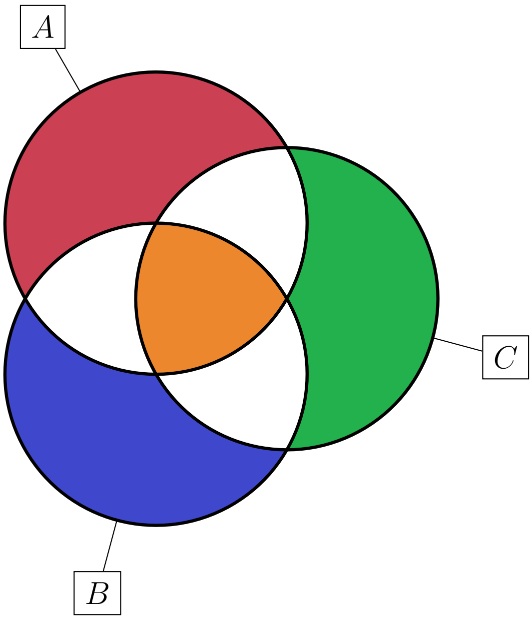
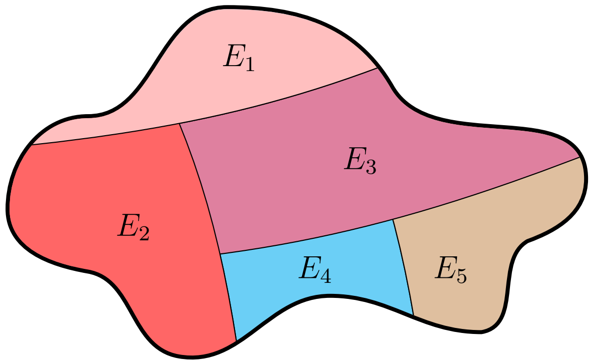



# Mathématiques du supérieur I

-

## Théorie élémentaire des ensembles

Daniel "Barbu" Williams

Mars 2020 - Novembre 2020

# Table des matières

Chapitre 1

# Théorie des ensembles

## Sommaire

Pour comprendre ce document, il est requis de connaître la logique classique, notamment :

- la notion d'assertion
- la négation d'une assertion
- la conjonction et la disjonction de deux assertions
- l'implication et l'équivalence entre deux assertions
- les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$

De plus, ce document n'a aucune vocation pédagogique.

# 1 Généralités

## 1.1 Appartenance, égalité et inclusion

**Définition 1 (Ensemble)**

Tous les objets que nous allons manipuler seront appelés **ensembles**.

Pour deux ensembles $x$ et $E$, il est possible de former une assertion notée $x \in E$ dont la véracité se déduira des axiomes et des définitions. Elle se lit « $x$ **appartient** à $E$ ».

Sa négation sera notée $x \notin E$.

**Remarque** :
• Les ensembles représentent intuitivement des sacs dans lesquels on peut mettre des objets. L'appartenance $x \in E$ traduit simplement le fait que l'objet $x$ se trouve dans le sac $E$.

**Axiome 1 (de l'existence)**

Il existe au moins un ensemble.

**Notation** :
Pour $E$ un ensemble et $P$ une assertion, on notera :
• $\forall x \in E, P(x)$ à la place de $\forall x, \big(x \in E \Rightarrow P(x)\big)$
• $\exists x \in E, P(x)$ à la place de $\exists x, \big(x \in E \wedge P(x)\big)$

On retrouve alors les propriétés similaires aux quantificateurs.

## Définition 2 (Egalité)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

On dira que $E$ est **égal** à $F$, et on notera $E = F$, si et seulement si
"tout élément de $E$ est aussi un élément de $F$ et réciproquement",
ce qui se traduit donc par $\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$.

Dans le cas contraire, on notera $E \neq F$, et on dira qu'ils sont **distincts**, ou **différents**.

## Axiome 2 (Principe de Leibniz)

Soient $E$ et $E'$ deux ensembles.
Si $E = E'$, alors toute formule vraie qui fait intervenir $E$ est aussi vraie si on remplace les apparitions de $E$ de notre choix par $E'$.

## Proposition 1

(1) L'égalité est **réflexive** : $\forall E, E = E$.
(2) L'égalité est **symétrique** : $\forall E, \forall F, (E = F \Rightarrow F = E)$.
(3) L'égalité est **transitive** : $\forall E, \forall F, \forall G, \big((E = F \text{ et } F = G) \Rightarrow E = G\big)$

*Démonstration*

(1) L'assertion $\forall E, \forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in E)$ étant vraie, il s'en suit que $\forall E, E = E$.

(2) Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & E = F \\ \iff & \forall x, \Big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\Big) \\ \iff & \forall x, \Big(x \in F \Leftrightarrow x \in E\Big) \\ \iff & F = E \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\boxed{E = F \iff F = E}$.

(3) Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.

Supposons que l'on a $E = F$ et $F = G$.
Donc $\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$ et $\forall x, (x \in F \Leftrightarrow x \in G)$.
Donc $\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in G)$.
Donc $E = G$.
**CQFD**.

**Remarque** :
On verra plus tard que cela fait de l'égalité une **relation d'équivalence**. Nous verrons aussi que c'est une **relation d'ordre**.

### Définition 3 (Inclusion)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

On dit que $E$ est **inclus** dans $F$ si et seulement si tout élément de $E$ est aussi un élément de $F$. Autrement dit, $\forall x \in E, x \in F$.

On note alors $E \subseteq F$. Dans le cas contraire, on note $E \nsubseteq F$.

**Remarque** :
• Certains auteurs notent $E \subset F$. Cela ne sera pas le cas dans ce document.
• On note aussi $F \supseteq E$.
• On dit aussi que $E$ est une **partie** de $F$.
• On dit aussi que $E$ est un **sous-ensemble** de $F$.
• On dit aussi que $F$ **contient** $E$.

### Proposition 2

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Si $E = F$, alors $E \subseteq F$ et $E \supseteq F$.

*Démonstration*
Supposons que $E = F$.
On a donc $\forall x, \Big(x \in E \Leftrightarrow x \in F\Big)$.
Donc $\forall x, \Big[\Big(x \in E \Rightarrow x \in F\Big)$ et $\Big(x \in E \Leftarrow x \in F\Big)\Big]$.
Donc $\forall x, \Big(x \in E \Rightarrow x \in F\Big)$ et $\forall x, \Big(x \in E \Leftarrow x \in F\Big)$.
Donc $E \subseteq F$ et $E \supseteq F$.

. **CQFD**.

## Proposition 3

(1) L'inclusion est **réflexive** : $\forall E, E \subseteq E$.

(2) L'inclusion est **antisymétrique** : $\forall E, \forall F, \big(E \subseteq F \text{ et } E \supseteq F\big) \Rightarrow E = F$.

(3) L'inclusion est **transitive** : $\forall E, \forall F, \forall G, \big(E \subseteq F \text{ et } F \subseteq G\big) \Rightarrow E \subseteq G$.

*Démonstration*

(1) L'assertion $\forall E, (x \in E \Rightarrow x \in E)$ étant vraie, il s'en suit que $\forall E, E \subseteq E$.

(2) Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Si on a $E \subseteq F$ et $E \supseteq F$, alors on a $\forall x, (x \in E \Rightarrow x \in F)$
et $\forall x, (x \in E \Leftarrow x \in F)$, donc on a $\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$,
c'est-à-dire $E = F$.

(3) Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.
Si on a $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$, alors on a $\forall x, (x \in E \Rightarrow x \in F)$
et $\forall x, (x \in F \Rightarrow x \in G)$ donc on a $\forall x, (x \in E \Rightarrow x \in G)$
c'est-à-dire $E \subseteq G$.
**CQFD**.

**Remarque** :
Nous verrons plus tard que cela fait de l'inclusion une **relation d'ordre**.

## Définition 4 (Inclusion stricte)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

On dit que $E$ est **inclus strictement** dans $F$ si et seulement si $E \subseteq F$ et $E \neq F$.

On notera alors $E \subsetneq F$.

**Remarque** :
• On dit aussi que $E$ est une **partie propre** de $F$.
• Il ne faut pas confondre l'inclusion stricte, $E \subsetneq F$ avec la non inclusion $E \not\subseteq F$.

**Proposition 4 (Transitivité de l'inclusion stricte)**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.

L'inclusion stricte est **transitive** : si $E \subsetneq F$ et $F \subsetneq G$, alors $E \subsetneq G$.

*Démonstration*

Supposons que $E \subsetneq F$ et $F \subsetneq G$.
Alors en particulier $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$.
Donc par transitivité de l'inclusion, on a $E \subseteq G$.
De plus, on a $E \neq F$.

Supposons par l'absurde que $E = G$ : on a en particulier d'après la proposition 2 page 4 que $G \subseteq E$.
Or, on a $F \subseteq G$ donc par transitivité de l'inclusion, on a $F \subseteq E$.
Or on a $E \subseteq F$. Donc par antisymétrie de l'inclusion, on a $E = F$, ce qui est absurde.

Donc $E \neq G$, et donc $\boxed{E \subsetneq G}$.
**CQFD**.

## 1.2 Compréhension et ensemble vide

**Axiome 3 (de compréhension)**

Soit $E$ un ensemble, et soit $P$ une assertion pouvant dépendre d'un paramètre.

Alors il existe une partie de $E$ dont les éléments sont exactement ceux qui vérfient $P$.
On le note $\{x \in E \mid P(x)\}$.

Autrement dit, $\forall y$, $\Big(y \in \{x \in E \mid P(x)\} \Leftrightarrow \Big[y \in E \text{ et } P(y)\Big]\Big)$.

**Proposition 5**

Soit $E$ un ensemble, et soient $P$ et $Q$ deux assertions pouvant dépendre d'un paramètre. On a alors les équivalences suivantes :
(1) $\forall x \in E$, $\Big(P(x) \Rightarrow Q(x)\Big)$ si et seulement si $\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\}$.
(2) $\forall x \in E$, $\Big(P(x) \Leftrightarrow Q(x)\Big)$ si et seulement si $\{x \in E \mid P(x)\} = \{x \in E \mid Q(x)\}$.

*Démonstration*

♦ (1) :

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, \Big(P(x) \Rightarrow Q(x)\Big)$.
Soit $y$ un ensemble. Supposons que $y \in \{x \in E \mid P(x)\}$. Donc $y \in E$ et $P(y)$.
Donc par hypothèse, $y \in E$ et $Q(y)$. Donc $y \in \{x \in E \mid Q(x)\}$.
Ceci étant vrai pour tout $y$, on a $\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\}$.

Ainsi, $\forall x \in E, \Big(P(x) \Rightarrow Q(x)\Big) \Rightarrow \{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\}$.
Soit $y \in E$ tel que $P(x)$. Donc $y \in \{x \in E \mid P(x)\}$.
Donc par hypothèse, on a $y \in \{x \in E \mid Q(x)\}$. Donc $Q(y)$.
Ceci étant vrai pour tout $y$ de $E$, on a donc $\forall x \in E, \Big(P(x) \Rightarrow Q(x)\Big)$.

Ainsi, $\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\} \Rightarrow \forall x \in E, \Big(P(x) \Rightarrow Q(x)\Big)$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in E, \Big(P(x) \Rightarrow Q(x)\Big) \iff \{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\}}$.

♦ (2) :

Utilisons (1).

$$\begin{aligned}
& \forall x \in E, \Big(P(x) \Leftrightarrow Q(x)\Big) \\
\iff & \forall x \in E, \Big(P(x) \Rightarrow Q(x)\Big) \text{ et } \forall x \in E, \Big(P(x) \Leftarrow Q(x)\Big) \\
\iff & \{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in E \mid Q(x)\} \text{ et } \{x \in E \mid P(x)\} \supseteq \{x \in E \mid Q(x)\} \\
\iff & \{x \in E \mid P(x)\} = \{x \in E \mid Q(x)\}.
\end{aligned}$$

**CQFD**.

## Proposition 6

(1) Soit $E$ un ensemble.
On a alors $\forall y, y \notin \{x \in E \mid x \neq x\}$.

(2) Soient $F$ et $G$ deux ensembles.
On a alors $\{x \in F \mid x \neq x\} = \{x \in G \mid x \neq x\}$.

*Démonstration*

♦ $(1)$ :
Par réflexivité de l'égalité, on a « $\forall y, y = y$ ».
Donc on a « $\forall y, y \notin E$ ou $y = y$ ».
Donc on a « $\forall y, \text{non}(y \in E$ et $y \neq y)$ », d'après les lois de De Morgan.
Donc on a « $\forall y, \text{non}\Big(y \in \{x \in E \mid x \neq x\}\Big)$ ».
Donc on a « $\forall y, y \notin \{x \in E \mid x \neq x\}$ ».

♦ $(2)$ :
D'après $(1)$, les assertions $\forall y, y \in \{x \in F \mid x \neq x\}$ et $\forall y, y \in \{x \in G \mid x \neq x\}$ sont fausses.
Donc l'assertion $\forall y, \Big(y \in \{x \in F \mid x \neq x\} \Leftrightarrow y \in \{x \in G \mid x \neq x\}\Big)$ est vraie.
Donc $\{x \in F \mid x \neq x\} = \{x \in G \mid x \neq x\}$.
**CQFD**.

## Définition 5 (ensemble vide)

Soit $E$ un ensemble.

La proposition précédente nous assure que le ensemble $\{x \in E \mid x \neq x\}$ ne dépend pas de $E$ et ne contient aucun élément. Nous l'appelerons donc **ensemble vide**, et le noterons $\emptyset$.

Ainsi, $\forall x, x \notin \emptyset$.

## Proposition 7

Soit $E$ un ensemble.

(1) $\emptyset \subseteq E$.
(2) $E \subseteq \emptyset \iff E = \emptyset$
(3) $E$ ne contient aucun élément si et seulement si $E = \emptyset$.

*Démonstration*

♦ $(1)$ : Par définition de l'ensemble vide, on a $\emptyset = \{x \in E \mid x \neq x\}$.
Or, $\{x \in E \mid x \neq x\}$ est par définition une partie de $E$. Donc $\emptyset \subseteq E$.

♦ $(2)$ : C'est immédiat d'après $(1)$ puisqu'on a donc :

$$E \subseteq \emptyset \underset{(1)}{\iff} \Big(E \subseteq \emptyset \text{ et } E \supseteq \emptyset\Big) \iff E = \emptyset.$$

♦ (3) :
D'après (2), cela revient donc à montrer que $E$ ne contient aucun élément si et seulement si $E \subseteq \emptyset$.

Raisonnons par doubles implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $E$ ne contienne aucun élément.
L'assertion « $\forall x, x \in E$ » est donc fausse.
Donc l'assertion « $\forall x, \Big(x \in E \Rightarrow x \in \emptyset\Big)$ » est vraie.
Donc $E \subseteq \emptyset$.

Ainsi, si $E$ ne contient aucun élément, alors $E \subseteq \emptyset$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $E \subseteq \emptyset$.
On a donc $\forall x, \Big(x \in E \Rightarrow x \in \emptyset\Big)$.
Donc par contraposition, $\forall x, \Big(x \notin E \Leftarrow x \notin \emptyset\Big)$.
Or, $\forall x, x \notin \emptyset$.
Donc par modus ponens, $\forall x, x \notin E$.
Donc $E$ ne contient aucun élément.

Ainsi, si $E \subseteq \emptyset$, alors $E$ ne contient aucun élément.

Finalement, $\boxed{E \text{ ne contient aucun élément si et seulement si } E = \emptyset}$.

**CQFD**.

**Remarque** :
Pour un ensemble $E$, d'après la réflexivité de l'inclusion, et d'après la proposition précédente, on a $E \subseteq E$ et $\emptyset \subseteq E$. On dira que $E$ et $\emptyset$ sont les **parties triviales** de $E$, pour les distinguer des autres parties (si elles existent).

## Proposition 8

Soit $P$ une assertion pouvant dépendre d'un paramètre.

(1) L'assertion « $\forall x \in \emptyset, P(x)$ » est toujours vraie.
(2) L'assertion « $\exists x \in \emptyset, P(x)$ » est toujours fausse.

*Démonstration*

♦ $(1)$ :

On sait que l'assertion « $\forall x, x \in \emptyset$ » est fausse.

Donc l'assertion « $\forall x, \Big(x \in \emptyset \Rightarrow P(x)\Big)$ » est vraie.

Donc l'assertion « $\forall x \in \emptyset, P(x)$ » est vraie.

♦ $(2)$ :

D'après $(1)$, en remplaçant $P$ par $\neg P$, l'assertion « $\forall x \in \emptyset, \neg P(x)$ » est vraie.

Donc l'assertion « $\neg\Big(\forall x \in \emptyset, \neg P(x)\Big)$ » est fausse.

Donc l'assertion « $\exists x \in \emptyset, \neg\neg P(x)$ » est fausse.

Donc l'assertion « $\exists x \in \emptyset, P(x)$ » est fausse.

**CQFD**.

## 1.3 Paires et singletons

**Axiome 4 (de la paire)**

Soient $x$ et $y$ deux ensembles.

Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement $x$ et $y$.

On le note $\{x; y\}$. On dit que c'est **la paire** qui contient $x$ et $y$.

Ainsi, $\forall z, \Big(z \in \{x; y\} \Leftrightarrow \Big[z = x \text{ ou } z = y\Big]\Big)$.

**Définition 6 (Singleton)**

Soit $x$ un ensemble.

On appelle **singleton** contenant $x$ la paire $\{x; x\}$. On le note plutôt $\{x\}$.

## 1.4 Ensemble des parties

**Axiome 5 (des parties)**

Soit $E$ un ensemble.

Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les parties de $E$.
On le note $\mathcal{P}(E)$, ou encore $\wp(E)$, ou bien encore $2^E$.

Ainsi, $\forall F, \Big(F \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow F \subseteq E\Big)$.

**Remarque** :
Pour toute assertion $Q$ pouvant dépendre d'un paramètre, l'assertion $\forall F \in \mathcal{P}(E), Q(F)$ sera parfois notée $\forall F \subseteq E, Q(F)$.

**Proposition 9**

Soit $E$ un ensemble. On a alors :

(1) $E \in \mathcal{P}(E)$
(2) $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$

Autrement dit, $\mathcal{P}(E)$ contient toujours les parties triviales de $E$.
Cela implique en particulier que $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide.

*Démonstration*

(1) La réflexivité de l'inclusion nous dit que $E \subseteq E$, et donc par définition, $E \in \mathcal{P}(E)$.

(2) La proposition 7 page 8 nous dit que $\emptyset \subseteq E$, donc par définition, $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

**CQFD**.

# 2 Opérations sur les ensembles

## 2.1 Réunion

**Axiome 6 (de la réunion)**

Soit $E$ un ensemble.

Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de $E$. On le note $\bigcup E$. On dit que c'est la **réunion** de $E$.

Autrement dit, pour tout ensemble $x$, $x \in \bigcup E$ si et seulement s'il existe $A \in E$ tel que $x \in A$.

**Proposition 10 (Réunion du vide)**

On a $\bigcup \emptyset = \emptyset$.

*Démonstration*

Par définition de la réunion, on a
$\forall x, \left(x \in \bigcup \emptyset \iff \exists A \in \emptyset, x \in A\right)$.
Or, on a $\neg\left(\exists A \in \emptyset\right)$ par définition.
Donc $\forall x, x \notin \bigcup \emptyset$.
Donc $\boxed{\bigcup \emptyset = \emptyset}$ d'après la prop. 7 p. 8.
**CQFD**.

**Proposition 11 (Réunion de l'ensemble des parties d'un ensemble)**

Soit $E$ un ensemble.

On a alors $\bigcup \mathcal{P}(E) = E$.

*Démonstration*

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup \mathcal{P}(E)$.

Il existe donc $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $x \in A$.

Or, $A \in \mathcal{P}(E)$ donc $A \subseteq E$.

Donc comme $x \in A$, on a aussi $x \in E$.

Donc si $x \in \bigcup \mathcal{P}(E)$, alors $x \in E$.

Donc $\forall x, \Big(x \in \bigcup \mathcal{P}(E) \Rightarrow x \in E\Big)$.

Donc $\bigcup \mathcal{P}(E) \subseteq E$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On sait que $E \in \mathcal{P}(E)$ d'après la prop. 9 p. 11.

Donc il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $x \in A$.

Donc $x \in \bigcup \mathcal{P}(E)$.

Donc si $x \in E$, alors $x \in \bigcup \mathcal{P}(E)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in E \Rightarrow x \in \bigcup \mathcal{P}(E)\Big)$.

Donc $E \subseteq \bigcup \mathcal{P}(E)$.

Finalement, $\boxed{\bigcup \mathcal{P}(E) = E}$.

**CQFD**.

## Proposition 12 (Croissance de la réunion)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Si $E \subseteq F$, alors $\bigcup E \subseteq \bigcup F$.

On dit que la réunion est **croissante** pour l'inclusion.

*Démonstration*

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup E$.

Il existe donc $A \in E$ tel que $x \in A$.

Or, $E \subseteq F$.

Donc $A \in F$.

Ainsi, $A \in F$ et $x \in A$.

Donc $x \in \bigcup F$.

Donc si $x \in \bigcup E$, alors $x \in \bigcup F$.

Donc $\forall x, \Big(x \in \bigcup E \Rightarrow x \in \bigcup F\Big)$.

Donc $\boxed{\bigcup E \subseteq \bigcup F}$.

**CQFD**.

## Définition 7 (Union de deux ensembles)

Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

On appelle **union** de $A$ et de $B$ l'ensemble $\bigcup\{A; B\}$. On le note plutôt $A \cup B$.

## Proposition 13

Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

Pour tout ensemble $x$, on a $x \in A \cup B$ si et seulement si $x \in A$ ou $x \in B$.

*Démonstration*

Soit $x$ un ensemble. Raisonnons par double implications :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $x \in A \cup B$. Donc par définition de l'union, on a $x \in \bigcup\{A; B\}$.
Donc par définition de la réunion, il existe $C \in \{A; B\}$ tel que $x \in C$.
Donc par définition de la paire, $C = A$ ou $C = B$.
Donc $x \in A$ ou $x \in B$.
Ainsi, $x \in A \cup B \Rightarrow \Big(x \in A \text{ ou } x \in B\Big)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $x \in A$ ou $x \in B$.
Donc par définition de la paire, il existe $C \in \{A; B\}$ tel que $x \in C$.
Donc par définition de la réunion, $x \in \bigcup\{A; B\}$.
Donc par définition de l'union, $x \in A \cup B$.
Ainsi, $x \in A \cup B \Leftarrow \Big(x \in A \text{ ou } x \in B\Big)$.

Finalement, $x \in A \cup B \iff \Big(x \in A \text{ ou } x \in B\Big)$.
**CQFD**.

**Remarque** :
Ce parallèle entre l'union et la disjonction va permettre "d'importer" les propriétés de la disjonction sur l'union, comme le montre la proposition suivante.

## Proposition 14

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles. On a les propriétés suivantes :

(1) L'union est **idempotente** : $A \cup A = A$.
(2) L'union est **associative** : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
(3) L'union est **commutative** : $A \cup B = B \cup A$.

### *Démonstration*

♦ (1) :

Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$x \in A \cup A \underset{13 \text{ p. } 14}{\iff} \Big(x \in A \text{ ou } x \in A\Big) \iff x \in A.$$

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in A \cup A \Leftrightarrow x \in A\Big)$. Donc $\boxed{A \cup A = A}$.

♦ (2) :

Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \cup C \\
\underset{13 \text{ p. } 14}{\iff} & \Big(x \in A \cup B \text{ ou } x \in C\Big) \\
\underset{13 \text{ p. } 14}{\iff} & \Big(\Big[x \in A \text{ ou } x \in B\Big] \text{ ou } x \in C\Big) \\
\iff & \Big(x \in A \text{ ou } \Big[x \in B \text{ ou } x \in C\Big]\Big) \\
\underset{13 \text{ p. } 14}{\iff} & \Big(x \in A \text{ ou } x \in B \cup C\Big) \\
\underset{13 \text{ p. } 14}{\iff} & x \in A \cup (B \cup C).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)\Big)$.

Donc $\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$.

♦ (3) :

Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$x \in A \cup B \underset{13 \text{ p. } 14}{\iff} \Big(x \in A \text{ ou } x \in B\Big) \iff \Big(x \in B \text{ ou } x \in A\Big) \underset{13 \text{ p. } 14}{\iff} x \in B \cup A.$$

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A\Big)$. Donc $\boxed{A \cup B = B \cup A}$.

**CQFD**.

**Proposition 15 (Réunion d'un singleton)**

Soit $A$ un ensemble.

On a alors $\bigcup\{A\} = A$.

*Démonstration*

On a $\bigcup\{A\} = \bigcup\{A; A\} = A \cup A \underset{14\text{ p. }15}{=} A$.
**CQFD**.

**Remarque** :
L'union peut être aussi vu comme une "opération" sur les parties d'un ensemble. Nous donnerons plus tard un sens rigoureux à cela.

**Proposition 16**

Soient $A$ et $B$ deux ensembles. On a alors :

$(1)$ $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$.
$A$ et $B$ sont des parties de leur union.

$(2)$ Soient $A'$ et $B'$ des ensembles.
Si $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$, alors $A \cup B \subseteq A' \cup B'$.
On dit que l'union est **compatible** avec l'inclusion.

$(3)$ Pour tout ensemble $C$, si $A \subseteq C$ et $B \subseteq C$, alors on a $A \cup B \subseteq C$.
On dit que l'union est le **minimum** pour l'inclusion parmi les ensembles qui contiennent à la fois $A$ et $B$.

$(4)$ Si $A \subseteq B$, alors $A \cup B = B$.
On dit que $B$ est **absorbant** pour l'union avec ses parties.

$(5)$ $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.

$(6)$ $A \cup \emptyset = A$.
On dit que l'ensemble vide est **neutre** pour l'union.

*Démonstration*

♦ (1) :

Soit $x$ un ensemble. Si $x \in A$, alors $x \in A$ ou $x \in B$, donc $x \in A \cup B$.

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B\Big)$. Donc $\boxed{A \subseteq A \cup B}$.

En échangeant le rôle de $A$ et de $B$, on obtient $B \subseteq B \cup A$, et donc par commutativité on a $\boxed{B \subseteq A \cup B}$.

♦ (2) :

Soient $A'$ et $B'$ deux ensembles tels que $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$.

Soit $x$ un ensemble. Supposons que $x \in A \cup B$. Donc $x \in A$ ou $x \in B$.

Donc par hypothèse, $x \in A'$ ou $x \in B'$. Donc $x \in A' \cup B'$.

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in A \cup B \Rightarrow x \in A' \cup B'\Big)$. Donc $\boxed{A \cup B \subseteq A' \cup B'}$.

♦ (3) :

Soit $C$ un ensemble. Supposons que $A \subseteq C$ et $B \subseteq C$.

En appliquant $(2)$ à $A' = C = B'$, on obtient $A \cup B \subseteq C \cup C$.

Or, l'idempotence de l'union nous dit que $C \cup C = C$. Donc $\boxed{A \cup B \subseteq C}$.

♦ (4) :

Supposons que $A \subseteq B$. Par réflexivité, on a $B \subseteq B$.

En appliquant $(3)$ à $C = B$, on obtient $A \cup B \subseteq B$.

De plus, d'après $(1)$, on a $B \subseteq A \cup B$.

Donc par double inclusion, on a $\boxed{A \cup B = B}$.

♦ (5) :

Le sens $\Rightarrow$ c'est $(4)$.

Montrons $\Leftarrow$ : supposons que $A \cup B = B$.

D'après $(1)$, on a $A \subseteq A \cup B$, donc $A \subseteq B$.

Par double implication, on obtient $\boxed{A \subseteq B \iff A \cup B = B}$.

♦ (6) :

D'après la proposition 7 page 8, on a $\emptyset \subseteq A$.

Donc d'après $(4)$, on a $\emptyset \cup A = A$.

Donc par commutativité de l'union, on a $\boxed{A \cup \emptyset = A}$.

**CQFD**.

**Définition 8 (Recouvrement)**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles.

On dit que $A$ et $B$ **recouvrent** $C$ si et seulement si $C \subseteq A \cup B$.

## 2.2 Intersection

**Proposition 17**

Soit $E$ un ensemble **non vide**. Soient $A_1$ et $A_2$ deux éléments de $E$.

Alors $\left\{x \in A_1 \,\middle|\, \forall B \in E, x \in B\right\} = \left\{x \in A_2 \,\middle|\, \forall B \in E, x \in B\right\}$.

*Démonstration*

Notons $\mathcal{A}_1 := \left\{x \in A_1 \,\middle|\, \forall B \in E, x \in B\right\}$ et $\mathcal{A}_2 := \left\{x \in A_2 \,\middle|\, \forall B \in E, x \in B\right\}$.

Soit $x \in \mathcal{A}_1$. Donc $x \in A_1$ et pour tout $B \in E$, on a $x \in B$.
En particulier, pour tout $B \in E$, on a $x \in B$.
Donc comme $A_2 \in E$, on a $x \in A_2$ et toujours, pour tout $B \in E$, on a $x \in B$.
Donc $x \in \mathcal{A}_2$. Ainsi, $\forall x, \left(x \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow x \in \mathcal{A}_2\right)$. Donc $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$.

Par symétrie des rôles entre $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, on obtient de même $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$.

Et donc par double inclusion, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.
**CQFD**.

### Définition 9 (Intersection d'un ensemble)

Soit $E$ un ensemble **non vide**. Soit $A \in E$.

La proposition précédente précédente nous assure que le ensemble $\left\{x \in A \,\middle|\, \forall B \in E, x \in B\right\}$ ne dépend pas du choix de $A$.

Nous l'appellerons **intersection** de $E$ et le noterons $\bigcap E$.

Autrement dit, $\forall x, \left(x \in \bigcap E \Leftrightarrow \forall B \in E, x \in B\right)$

### Proposition 18 (Décroissance de l'intersection)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Si $E \subseteq F$, alors $\bigcap E \supseteq \bigcap F$.
On dit que l'intersection est **décroissante** pour l'inclusion.

*Démonstration*

Supposons que $E \subseteq F$.
Soit $x$ un ensemble.
Supposons que $x \in \bigcap F$.
Donc $\forall B \in F, x \in B$.
Soit $A \in E$.
Or, $E \subseteq F$.
Donc $A \in F$.
Donc $x \in A$.
Donc $\forall A \in E, x \in A$.
Donc $x \in \bigcap E$.
Donc si $x \in \bigcap F$, alors $x \in \bigcap E$.
Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap F \Rightarrow x \in \bigcap E\right)$.
Donc $\boxed{\bigcap E \supseteq \bigcap F}$.
**CQFD**.

### Définition 10 (Intersection de deux ensembles)

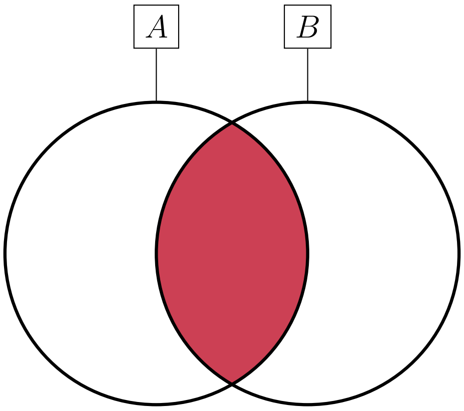
Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

On appelle **intersection** de $A$ et de $B$ l'ensemble $\bigcap\{A; B\}$. On le note plutôt $A \cap B$.

**Illustration** :

Illustrons l'intersection par un **diagramme de Venn**.

Ici, on a colorié en rouge l'ensemble $A \cap B$.




### Pour la petite histoire

**John Venn** (1834-1923) est un mathématicien et logicien britannique, renommé pour avoir conçu les diagrammes de Venn qu'il a présenté en 1881. En 1883, il est élu membre de la Royal Society.

### Proposition 19

Soient $A$ et $B$ deux ensemble.

Pour tout ensemble $x$, on a $x \in A \cap B$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$.

*Démonstration*

Soit $x$ un ensemble. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & x \in A \cap B. \\ \iff & x \in \bigcap\{A; B\}. \\ \iff & \forall C \in \{A; B\}, x \in C. \\ \iff & x \in A \text{ et } x \in B. \end{aligned}$$

Ainsi, $x \in A \cap B \Leftrightarrow \Big(x \in A \text{ et } x \in B\Big)$.
**CQFD**.

**Remarque** :
• Nous pouvons donc écrire $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$.
• Ce parallèle entre l'intersection et la conjonction va permettre "d'importer" les propriétés de la conjonction sur l'intersection, comme le montre la proposition suivante.

## Proposition 20

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles. On a les propriétés suivantes :

(1) L'intersection est **idempotente** : $A \cap A = A$.
(2) L'intersection est **associative** : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
(3) L'intersection est **commutative** : $A \cap B = B \cap A$.

*Démonstration*

♦ (1) :
Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :
$x \in A \cap A \underset{19 \text{ p. } 20}{\iff} \Big(x \in A \text{ et } x \in A\Big) \iff x \in A$.
Ainsi, $\forall x, \Big(x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A\Big)$. Donc $\boxed{A \cap A = A}$.

♦ (2) :
Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & x \in (A \cap B) \cap C \\ \underset{19 \text{ p. } 20}{\iff} & \Big(x \in A \cap B \text{ et } x \in C\Big) \\ \underset{19 \text{ p. } 20}{\iff} & \Big(\Big[x \in A \text{ et } x \in B\Big] \text{ et } x \in C\Big) \end{aligned}$$

$\iff \Big(x \in A \text{ et } \Big[x \in B \text{ et } x \in C\Big]\Big)$

$\underset{19 \text{ p. } 20}{\iff} \Big(x \in A \text{ et } x \in B \cap C\Big)$

$\underset{19 \text{ p. } 20}{\iff} x \in A \cap (B \cap C)$.

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)\Big)$.

Donc $\boxed{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$.

♦ (3) :

Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$x \in A \cap B \underset{19 \text{ p. } 20}{\iff} \Big(x \in A \text{ et } x \in B\Big) \iff \Big(x \in B \text{ et } x \in A\Big) \underset{19 \text{ p. } 20}{\iff} x \in B \cap A$.

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in B \cap A\Big)$. Donc $\boxed{A \cap B = B \cap A}$.

**CQFD**.

**Remarque** :
On peut ici aussi voir l'intersection comme une "opération" sur les parties d'un ensemble. Là encore, nous préciserons le sens plus tard.

**Proposition 21 (Intersection d'un singleton)**

Soit $A$ un ensemble.

On a alors $\bigcap\{A\} = A$.

*Démonstration*

$\bigcap\{A\} = \bigcap\{A; A\} = A \cap A \underset{20 \text{ p. } 21}{=} A$.

**CQFD**.

## Proposition 22

Soient $A$ et $B$ deux ensembles. On a alors :

(1) $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$.
L'intersection est une partie de ce qu'elle intersecte.

(2) Soient $A'$ et $B'$ deux ensembles.
Si $A' \subseteq A$ et $B' \subseteq B$, alors $A' \cap B' \subseteq A \cap B$.
On dit que l'intersection est **compatible** avec l'inclusion.

(3) Pour tout ensemble $C$, si $C \subseteq A$ et $C \subseteq B$, alors $C \subseteq A \cap B$.
On dit que l'intersection est le **maximum** pour l'inclusion des parties de $A$ et de $B$.

(4) Si $A \subseteq B$, alors $A \cap B = A$.
On dit que $B$ est **neutre** pour l'intersection avec ses parties.

(5) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.

(6) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
On dit que l'ensemble vide est **aborbant** pour l'intersection.

*Démonstration*

♦ (1) :
On a vu que $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$. En particulier, $A \cap B$ est donc une partie de $A$. Donc $\boxed{A \cap B \subseteq A}$.

De même par commutativité, $A \cap B = B \cap A = \{x \in B \mid x \in A\} \subseteq B$.
Donc $\boxed{A \cap B \subseteq B}$.

♦ (2) :
Soient $A'$ et $B'$ deux ensembles tels que $A' \subseteq A$ et $B' \subseteq B$.
Soit $x$ un ensemble. Supposons que $x \in A' \cap B'$.
Donc d'après la proposition 19 page 20, on a $x \in A'$ et $x \in B'$.
Donc par hypothèse, on a $x \in A$ et $x \in B$.
Donc toujours d'après la proposition 19 page 20, on a $x \in A \cap B$.

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A \cap B\Big)$.

Donc $\boxed{A' \cap B' \subseteq A \cap B}$.

♦ $(3)$ :

Soit $C$ un ensemble tel que $C \subseteq A$ et $C \subseteq B$.

En appliquant $(2)$ à $A' = C = B'$, on obtient $C \cap C \subseteq A \cap B$.

Donc par idempotence de l'intersection, on obtient $\boxed{C \subseteq A \cap B}$.

♦ $(4)$ :

Supposons que $A \subseteq B$.

Par réflexivité de l'inclusion, on a aussi $A \subseteq A$.

Donc d'après $(3)$, on a $A \subseteq A \cap B$.

De plus, d'après $(1)$, on a $A \cap B \subseteq A$.

Donc par double inclusion, on a $\boxed{A \cap B = A}$.

♦ $(5)$ :

Le sens $\Rightarrow$ c'est $(4)$.

Montrons $\Leftarrow$ : supposons que $A \cap B = A$.

D'après $(1)$, on a $A \cap B \subseteq B$ donc $A \subseteq B$.

Par double inclusion, on obtient donc $\boxed{A \subseteq B \iff A \cap B = A}$.

♦ $(6)$ :

D'après la proposition 7 page 8, on a $A \cap \emptyset \supseteq \emptyset$.

Or, d'après $(1)$, on a $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$.

Donc par double inclusion $\boxed{A \cap \emptyset = \emptyset}$.

**CQFD**.

## Définition 11 (Ensembles disjoints)

Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

On dit que $A$ et $B$ sont **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

**Exemple** :

D'après la proposition 22 page 23, l'ensemble vide est disjoint de tout ensemble.

## Proposition 23 (Lien entre union et intersection)

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles.

(1) $A \cap B \subseteq A \cup B$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
On dit que l'union est **distributive** sur l'intersection.

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
On dit que l'intersection est **distributive** sur l'union.

*Démonstration*

♦ (1) :
La proposition 22 page 23 nous dit que $A \cap B \subseteq A$, et la proposition 16 page 16 nous dit que $A \subseteq A \cup B$.
Donc par transitivité de l'inclusion, on obtient $\boxed{A \cap B \subseteq A \cup B}$.

♦ (2) :
Soit $x$ un ensemble. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in A \cup (B \cap C) \\
\underset{13 \text{ p. } 14}{\Longleftrightarrow} & \Big(x \in A \text{ ou } x \in B \cap C\Big) \\
\underset{19 \text{ p. } 20}{\Longleftrightarrow} & \Big(x \in A \text{ ou } \Big[x \in B \text{ et } x \in C\Big]\Big) \\
\Longleftrightarrow & \Big(\Big[x \in A \text{ ou } x \in B\Big] \text{ et } \Big[x \in A \text{ ou } x \in C\Big]\Big) \\
\underset{13 \text{ p. } 14}{\Longleftrightarrow} & \Big(x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C\Big) \\
\Longleftrightarrow & \ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\Big)$.
Donc $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$.

♦ (3) :
Soit $x$ un ensemble. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in A \cap (B \cup C) \\
\underset{19 \text{ p. } 20}{\Longleftrightarrow} & \Big(x \in A \text{ et } x \in B \cup C\Big) \\
\underset{13 \text{ p. } 14}{\Longleftrightarrow} & \Big(x \in A \text{ et } \Big[x \in B \text{ ou } x \in C\Big]\Big) \\
\Longleftrightarrow & \Big(\Big[x \in A \text{ et } x \in B\Big] \text{ ou } \Big[x \in A \text{ et } x \in C\Big]\Big)
\end{aligned}$$

$\underset{19 \text{ p. } 20}{\iff} \Big(x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C\Big)$

$\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\Big)$.

Donc $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$.

**CQFD**.

**Définition 12 (Partitionnement)**

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles.

On dit que $A$ et $B$ **partitionnent** $C$ si et seulement si :

$(1)$ $A$ et $B$ sont des parties de $C$.

$(2)$ $A$ et $B$ recouvrent $C$, c'est-à-dire $A \cup B = C$.

$(3)$ $A$ et $B$ sont disjoints, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$.

## 2.3 Différence

**Définition 13 (Différence entre deux ensembles)**

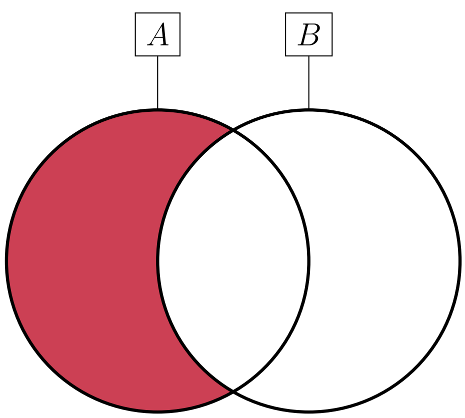
Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

On appelle **différence** de $A$ par $B$ l'ensemble $\Big\{x \in A \;\Big|\; x \notin B\Big\}$.
On le note $A - B$ ou encore $A \backslash B$. On dit aussi « $A$ **privé de** $B$ ».

**Illustration** :

Illustrons la différence ensembliste par un **diagramme de Venn**.

Ici, on a colorié en rouge l'ensemble $A - B$.



## Proposition 24

Soient $A$ et $B$ deux ensembles. On a alors :

(1) $A - A = \emptyset$

(2) $A - \emptyset = A$

(3) $(A - B) \cap B = \emptyset$ donc $A - B$ et $B$ sont **disjoints**.

(4) $(A - B) \cup B = A \cup B$ donc $A - B$ et $B$ **recouvrent** $A \cup B$.

(5) $A - B$ et $B$ **partionnent** $A \cup B$.

(6) $A - (A - B) = A \cap B$

(7) Pour tout ensemble $x$, on a $x \notin A - B \iff \Big(x \in A \Rightarrow x \in B\Big)$.

(8) $A - B = \emptyset \iff A \subseteq B$

*Démonstration*

♦ (1) :

D'après le principe de non contradiction, on a $\forall x, \neg(x \in A$ et $x \notin A)$.

Donc on a $\forall x, \neg(x \in \{x \in A \mid x \notin A\})$.

Donc on a $\forall x, \neg(x \in A - A)$.

Donc on a $\forall x, x \notin A - A$.

Donc d'après la proposition 7 page 8, on a $\boxed{A - A = \emptyset}$.

♦ (2) :

On sait que $\forall x, x \notin \emptyset$.

Donc $\forall x, \Big(x \in A \iff \Big[x \in A \text{ et } x \notin \emptyset\Big]\Big)$.

Or, par définition $\forall x, \Big([x \in A \text{ et } x \notin \emptyset\Big] \iff x \in A - \emptyset\Big)$.

Donc par transitivité de l'équivalence, on a $\forall x, \Big(x \in A \iff x \in A - \emptyset\Big)$.

Donc par définition, $\boxed{A = A - \emptyset}$.

♦ (3) :

On sait par le principe de non-contradiction que $\forall x, \neg\Big(x \in B$ et $x \notin\ \Big)$.
En particulier, on a donc $\forall x, \neg\Big(x \in A$ et $x \in B$ et $x \notin B\Big)$.
Donc on a $\forall x, \neg\Big(x \in A \cap B$ et $x \notin B\Big)$.
Donc on a $\forall x, \neg\Big(x \in (A \cap B) - B\Big)$.
Donc on a $\forall x, x \notin (A \cap B) - B$.
Donc d'après la proposition 7 page 8, on a $\boxed{(A \cap B) - B = \emptyset}$.

♦ (4) :
Prouvons-le par **double inclusion** :
$\boxed{\subseteq}$ Par définition $A - B$ est une partie de $A$ donc $A - B \subseteq A$.
Par réflexivité de l'inclusion, on a $B \subseteq B$.
Donc par comptatibilité de l'union avec l'inclusion, on a $(A - B) \cup B \subseteq A \cup B$.

$\boxed{\supseteq}$ Soit $x$ un ensemble.
Supposons que $x \in A \cup B$. Donc $x \in A$ ou $x \in B$.

— si $x \in B$, comme $B \subseteq (A - B) \cup B$, on a $x \in (A - B) \cup B$
— si $x \notin B$, alors par hypothèse $x \in A$ donc en particulier $x \in A$ et $x \notin B$ donc $x \in A - B$. Or $A - B \subseteq (A - B) \cup B$ donc $x \in (A - B) \cup B$.

Dans tous les cas, $x \in (A - B) \cup B$.
Donc $\forall x, \Big(x \in A \cup B \Rightarrow x \in (A - B) \cup B\Big)$.
Donc $A \cup B \subseteq (A - B) \cup B$.

Finalement, $\boxed{(A - B) \cup B = A \cup B}$.

♦ (5) :
On sait déjà d'après (3) et (4) que $B$ et $A - B$ sont disjoints et recouvrent $A \cup B$.
Il reste à montrer que ce sont bien des parties de $A \cup B$. $B$ est bien une partie de $A \cup B$ d'après la proposition 16 page 16 .
$A - B \subseteq A \subseteq A \cup B$ donc $A - B$ est aussi une partie de $A \cup B$.
Ainsi, $\boxed{B \text{ et } A - B \text{ partionnent bien } A \cup B}$.

♦ (6) :
Soit $x$ un ensemble. On a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& x \in A - (A - B) \\
\iff\ & x \in A \text{ et } x \notin A - B \\
\iff\ & x \in A \text{ et } \neg(x \in A - B)
\end{aligned}
$$

$\iff x \in A$ et $\neg(x \in A$ et $x \notin B)$
$\iff x \in A$ et $(x \notin A$ ou $x \in B)$
$\iff (x \in A$ et $x \notin A)$ ou $(x \in A$ et $x \in B)$
$\iff x \in A$ et $x \in B$
$\iff x \in A \cap B$
Donc $\forall x, \Big(x \in A - (A - B) \iff x \in A \cap B\Big)$.
Donc $\boxed{A - (A - B) = A \cap B}$.

♦ (7) :
Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :
$x \notin A - B$
$\iff \neg(x \in A - B)$
$\iff \neg(x \in A$ et $x \notin B)$
$\iff \neg(x \in A)$ ou $\neg(x \notin B)$
$\iff \neg(x \in A)$ ou $x \in B$
$\iff x \in A \Rightarrow x \in B$.
Donc par transitivité de l'équivalence, on a donc $\boxed{x \notin A - B \iff \Big(x \in A \Rightarrow x \in B\Big)}$.

♦ (8) :
On a les équivalences suivantes :
$A - B = \emptyset$
$\underset{7 \text{ p. } 8}{\iff} \forall x, x \notin A - B$
$\iff \forall x, \neg(x \in A - B)$
$\underset{(7)}{\iff} \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$
$\iff A \subseteq B$.
Donc par transitivité de l'équivalence, on a donc $\boxed{A - B = \emptyset \iff A \subseteq B}$.

**CQFD**.

## Proposition 25 (Lois de De Morgan - Différence)

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles. On a alors :

(1) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

**Illustration** :

Illustrons cette proposition à l'aide de **diagrammes de Venn**.

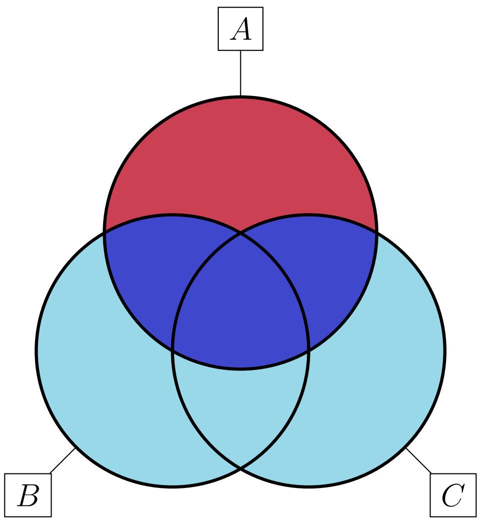
♦ Commençons par $(1)$.

Dans chacun des dessins ci-dessous, on a colorié en rouge l'ensemble qui nous intéresse.

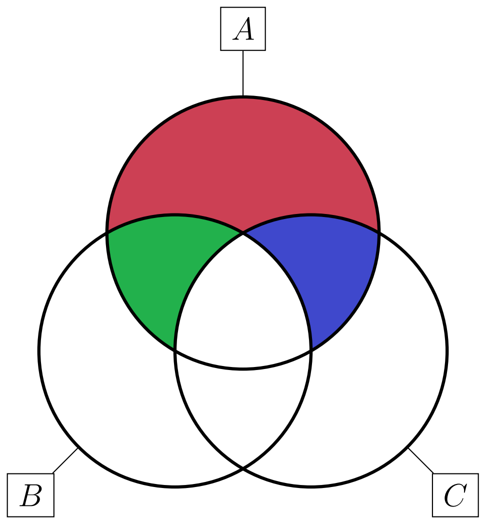
— dans le premier dessin, $B \cup C$ est en (bleu+cyan) et donc la partie que l'on retire à $A$ est en bleu, donc on obtient bien la partie en rouge

— dans le deuxième dessin, $A-B$ est en (rouge+bleu) et $A-C$ est en (rouge+vert). On prend l'intersection de ces deux, qui est bien la patie en rouge

On voit donc bien que les parties en rouges sont les mêmes.




$A-(B \cup C)$



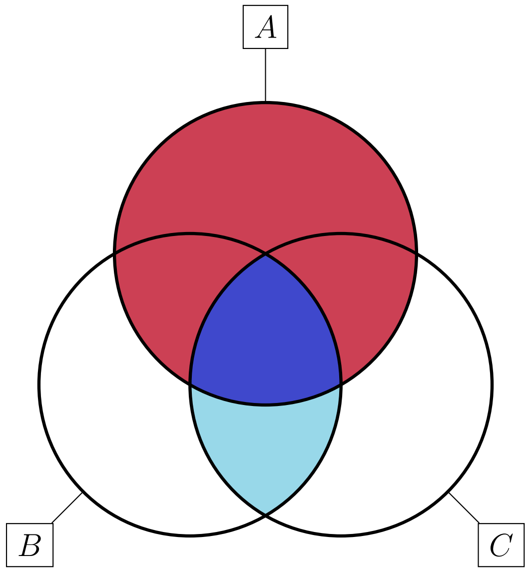

$(A-B) \cap (A-C)$

♦ Continuons avec $(2)$.

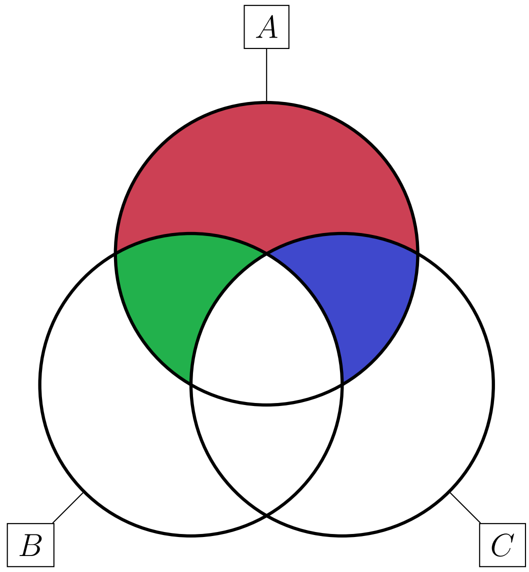
— dans le premier dessin, on a retiré à $A$ l'ensemble $B \cap C$ qui est en (bleu+cyan), donc on a retiré la partie en bleu et donc ce que l'on obtient est la partie en rouge.

— dans le deuxième dessin, on unie la partie (rouge+vert) à la partie (rouge+bleu) et cet union est l'ensemble qui nous intéresse (vert+rouge+bleu).

On voit donc bien que les parties qui nous intéressent sont les mêmes.




$A - (B \cap C)$




$(A - B) \cup (A - C)$

Passons maintenant à la démonstration.

*Démonstration*

♦ (1) :

Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in A - (B \cup C) \\
\iff & x \in A \text{ et } x \notin B \cup C \\
\iff & x \in A \text{ et } \neg(x \in B \cup C) \\
\iff & x \in A \text{ et } \neg(x \in B \text{ ou } x \in C) \\
\iff & x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ et } x \notin C) \\
\iff & (x \in A \text{ et } x \in A) \text{ et } (x \notin B \text{ et } x \notin C) \\
\iff & (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin C) \\
\iff & x \in A - B \text{ et } x \in A - C \\
\iff & x \in (A - B) \cap (A - C)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, \Big(x \in A - (B \cup C) \iff x \in (A - B) \cap (A - C)\Big)$.

Donc $\boxed{A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)}$.

♦ (2) :

Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in A - (B \cap C) \\
\iff & x \in A \text{ et } x \notin B \cap C \\
\iff & x \in A \text{ et } \neg(x \in B \cap C) \\
\iff & x \in A \text{ et } \neg(x \in B \text{ et } x \in C)
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$ $x \in A$ et ($x \notin B$ ou $x \notin C$)
$\Longleftrightarrow$ ($x \in A$ et $x \notin B$) ou ($x \in A$ et $x \notin C$)
$\Longleftrightarrow$ $x \in A - B$ ou $x \in A - C$
$\Longleftrightarrow$ $x \in (A - B) \cup (A - C)$.
Donc $\forall x, \Big(x \in A - (B \cap C) \iff x \in (A - B) \cup (A - C)\Big)$.
Donc $\boxed{A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)}$.

**CQFD**.

### Pour la petite histoire

**Auguste De Morgan** (1806 - 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne ; il a notamment formulé les lois de De Morgan.

### Proposition 26

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles. On a alors :

(1) $A - B = A - (A \cap B)$

(2) $(A \cap B) - C = A \cap (B - C) = (A - C) \cap (B - C)$

(3) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

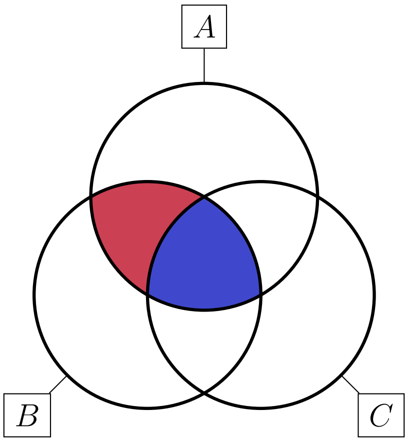
**Illustration** :
(1) étant évident visuellement, illustrons (2) et (3) à l'aide de **diagrammes de Venn**.

♦ Commençons avec (2) : on a colorié en rouge l'ensemble en question, et on peut donc voir qu'ils sont égaux.

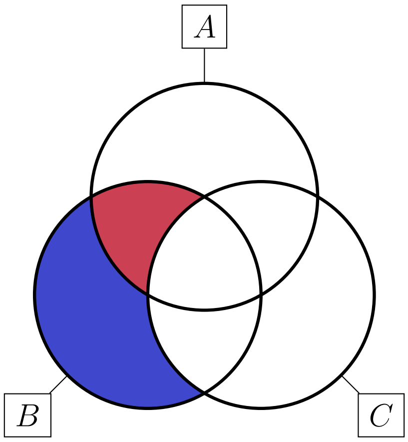
— Dans le premier diagramme, l'ensemble (rouge+bleu) représente $A \cap B$.

— Dans le deuxième diagramme, l'ensemble (rouge+bleu) représente $B - C$.

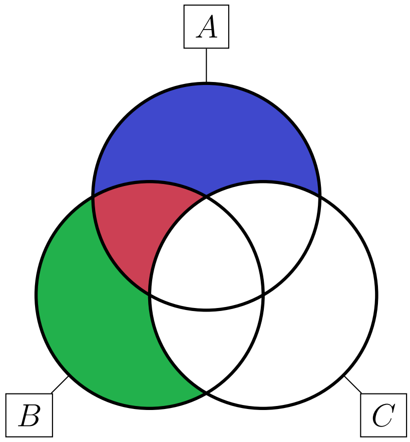
— Enfin, dans le dernier diagramme, l'ensemble (rouge+bleu) représente $A-C$ et l'ensemble (rouge+vert) représente $B - C$.



$(A \cap B) - C$



$A \cap (B - C)$



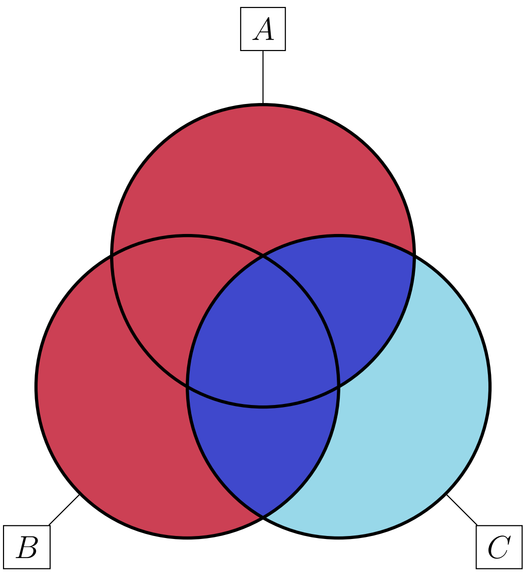
$(A - C) \cap (B - C)$

♦ Continuons avec (3) :

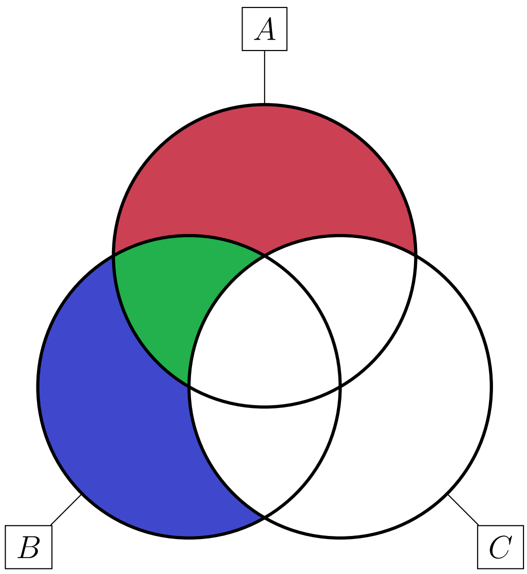
— dans le premier dessin, $C$ est en (bleu+cyan) et $A \cup B$ est en (rouge+bleu). On a donc retiré la partie en commun bleu de $A \cup B$, et donc la partie qui nous intéresse est la partie rouge.

— dans le deuxième dessin, $A - C$ est en (rouge+vert) et $B - C$ est en (bleu+vert). On prend la réunion de ces parties et donc l'ensemble qui nous intéresse est (bleu+vert+rouge).

On voit donc bien que les parties qui nous intéressent sont les mêmes.



$(A \cup B) - C$



$(A - C) \cup (B - C)$

Passons donc à la démonstration de la proposition.

*Démonstration*

♦ (1) :

$A - (A \cap B) \underset{25 \text{ p. } 29}{=} (A - A) \cup (A - B) \underset{24 \text{ p. } 27}{=} \emptyset \cup (A - B) \underset{16 \text{ p. } 16}{=} A - B$

♦ (2) :

Commençons par prouver que $(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$.

Soit $x$ un ensemble, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cap B) - C \\
\iff & x \in A \cap B \text{ et } x \notin C \\
\iff & (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ et } x \notin C \\
\iff & x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\
\iff & x \in A \text{ et } x \in B - C \\
\iff & x \in A \cap (B - C)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, \Big(x \in (A \cap B) - C \iff x \in A \cap (B - C)\Big)$.

Donc $\boxed{(A \cap B) - C = A \cap (B - C)}$.

Prouvons à présent que $A \cap (B - C) = (A - C) \cap (B - C)$.

Soit $x$ un ensemble, on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in A \cap (B - C) \\
\iff & x \in A \text{ et } x \in B - C \\
\iff & x \in A \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\
\iff & x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \notin C \\
\iff & x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } (x \notin C \text{ et } x \notin C) \\
\iff & (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ et } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\
\iff & x \in A - C \text{ et } x \in B - C \\
\iff & x \in (A - C) \cap (B - C)
\end{aligned}$$

Donc $\forall x, \Big(x \in A \cap (B - C) \iff x \in (A - C) \cap (B - C)\Big)$.

Donc $\boxed{A \cap (B - C) = (A - C) \cap (B - C)}$.

♦ (3) :

Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) - C \\
\iff & x \in A \cup B \text{ et } x \notin C \\
\iff & (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \notin C \\
\iff & (x \in A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin C) \\
\iff & x \in A - C \text{ ou } x \in B - C
\end{aligned}$$

$\iff x \in (A - C) \cup (B - C)$
Donc $\forall x, \Big(x \in (A \cup B) - C \iff x \in (A - C) \cup (B - C)\Big)$
Donc $\boxed{(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)}$.

**CQFD**.

## 2.4 Complémentaire

**Définition 14 (Complémentaire d'un ensemble)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $F$ une partie de $E$.

On appelle **complémentaire** de $F$ dans $E$ l'ensemble $E - F$.
On le note parfois $\complement_E F$ ou encore $F^C$ ou bien $\overline{F}$ s'il n'y a pas de confusion.

Comme le complémentaire est un cas particulier de la différence, beaucoup des propriétés de la différence sont conservées, la plupart étant même simplifiées.

**Proposition 27**

Soit $E$ un ensemble. Soit $F$ une partie de $E$. On a alors :

(1) $\complement_E E = \emptyset$

(2) $\complement_E \emptyset = E$

(3) $F \cap \complement_E F = \emptyset$
Une partie et son complémentaire sont **disjoints**.

(4) $F \cup \complement_E F = E$
Une partie et son complémentaire **recouvrent** $E$.

(5) $F$ et $\complement_E F$ **partitionnent** $E$.

(6) $\complement_E \left(\complement_E F\right) = F$.
On dit que le complémentaire est **involutif**.

*Démonstration*

On utilise donc fortement ici la proposition 24 page 27.

♦ $(1)$ : $\complement_E E = E - E = \emptyset$

♦ $(2)$ : $\complement_E \emptyset = E - \emptyset = E$

♦ $(3)$ : $F \cap \complement_E F = F \cap (E - F) = \emptyset$

♦ $(4)$ : $F \cup \complement_E F = F \cup (E - F) = F \cup E = E$

♦ $(5)$ : $F$ et $\complement_E F$ étant des parties de $E$, on a le résultat en utilisant $(3)$ et $(4)$.

♦ $(6)$ : $\complement_E \left(\complement_E F\right) = E - (E - F) = E \cap F = F$

**CQFD**.

## Proposition 28 (Différence et complémentaire)

$(1)$ Soit $E$ un ensemble. Soient $F$ et $G$ des parties de $E$.
Alors $G - F = G \cap \complement_E F$.

$(2)$ Soit $E$ un ensemble. Soient $F$ et $G$ des parties de $E$.
Alors $G - F = \left(\complement_E F\right) - \left(\complement_E G\right)$

$(3)$ Soient $A$ et $B$ deux ensembles.
Alors $A - B = A \cap \complement_{A \cup B} B$.

*Démonstration*

♦ $(1)$ $G \cap \complement_E F = G \cap (E - F) \underset{26\text{ p. }32}{=} (G \cap E) - F \underset{22\text{ p. }23}{=} G - F$

♦ $(2)$ $G - F \underset{(1)}{=} G \cap \complement_E F \underset{27\text{ p. }35}{=} \complement_E \left(\complement_E G\right) \cap \complement_E F = \complement_E F \cap \complement_E \left(\complement_E G\right)$
$\underset{27\text{ p. }35}{=} \left(\complement_E F\right) - \left(\complement_E G\right)$

♦ $(3)$ C'est tout simplement $(1)$ en utilisant $E = A \cup B$, $F = B$ et $G = A$.

**CQFD**.

## Proposition 29

Soit $E$ un ensemble. Soient $F$ et $G$ deux parties de $E$.
Si $F \subseteq G$, alors $\complement_E F \supseteq \complement_E G$.
On dit que le passage au complémentaire est **décroissant** pour l'inclusion.

*Démonstration*

Supposons que $F \subseteq G$.
Donc $\forall x, (x \in F \Rightarrow x \in G)$.
Donc par contraposition, $\forall x, (x \notin G \Rightarrow x \notin F)$.

Ainsi, soit $x$ un ensemble.
Si $x \in \complement_E G$, alors $x \in E$ et $x \notin G$.
Donc vu l'implication, $x \in E$ et $x \notin F$.
Donc $x \in \complement_E F$.

Ainsi, $\forall x, \left(x \in \complement_E G \Rightarrow x \in \complement_E F\right)$.
Donc $\boxed{\complement_E F \supseteq \complement_E G}$.
**CQFD**.

## Proposition 30 (Lois de De Morgan - Complémentaire)

Soit $E$ un ensemble. Soient $A$ et $B$ des parties de $E$. On a alors :

(1) $\complement_E(A \cup B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B)$

(2) $\complement_E(A \cap B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B)$

*Démonstration*

♦ (1) $\complement_E(A \cup B) = E - (A \cup B) \underset{25 \text{ p. } 29}{=} (E - A) \cap (E - B) = \complement_E(A) \cap \complement_E(B)$

♦ (2) $\complement_E(A \cap B) = E - (A \cap B) \underset{25 \text{ p. } 29}{=} (E - A) \cup (E - B) = \complement_E(A) \cup \complement_E(B)$

**CQFD**.

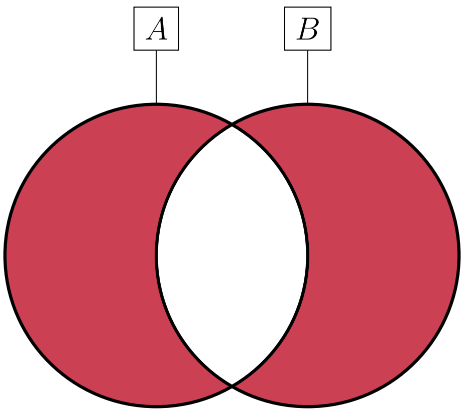
## 2.5 Différence symétrique

**Définition 15 (Différence symétrique)**

Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

On appelle **différence symétrique** de $A$ et $B$ l'ensemble $(A \cup B) - (A \cap B)$.
On le note généralement $A \Delta B$.

**Illustration** :
Illustrons la différence symétrique de $A$ et de $B$ par un **diagramme de Venn**.
Ici, on a colorié en rouge l'ensemble $A \Delta B$.




**Remarque** :
On voit en fait que pour tout ensemble $x$,
on a $x \in A \Delta B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } \neg(x \in A \text{ et } x \in B) \iff x \in A$ **xor** $x \in B$.
Donc comme pour l'union avec la disjonction, pour l'intersection et la conjonction, nous pouvons remarquer que la différence symétrique et la **disjonction exclusive** sont liées.

## Proposition 31

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles. On a alors

(1) $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
On dit que la différence symétrique est **associative**.

(2) $A\Delta B = B\Delta A$.
On dit que la différence symétrique est **commutative**.

(3) $A\Delta\emptyset = A$.
On dit que l'ensemble vide est le **neutre** de la différence symétrique.

(4) $A\Delta A = \emptyset$.
On dit que tout ensemble est son propre **symétrique**.

(5) Réciproquement, si $A\Delta B = \emptyset$, alors $A = B$.

(6) Si $A\Delta C = B\Delta C$, alors $A = B$.
On dit que la différence symétrique est **régulière**.

*Démonstration*

♦ (1) :
Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in (A\Delta B)\Delta C \\
\iff\ & x \in A\Delta B \textbf{ xor } x \in C \\
\iff\ & (x \in A \textbf{ xor } x \in B) \textbf{ xor } x \in C \\
\iff\ & x \in A \textbf{ xor } (x \in B \textbf{ xor } x \in C) \\
\iff\ & x \in A \textbf{ xor } x \in B\Delta C \\
\iff\ & x \in A\Delta(B\Delta C).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x, \Big(x \in (A\Delta B)\Delta C \iff x \in A\Delta(B\Delta C)\Big)$.
Donc $\boxed{(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)}$.

♦ (2) :
$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (B \cap A) - (A \cap B) = (B \cap A) - (B \cap A) = B\Delta A$.

♦ (3) :

$A\Delta\emptyset = (A\cup\emptyset)-(A\cap\emptyset) \underset{16\text{ p. }16}{=} A-(A\cap\emptyset) \underset{22\text{ p. }23}{=} A-\emptyset \underset{24\text{ p. }27}{=} A$

♦ (4) :

$A\Delta A = (A\cup A)-(A\cap A) \underset{16\text{ p. }16}{=} A-(A\cap A) \underset{22\text{ p. }23}{=} A-A \underset{24\text{ p. }27}{=} \emptyset$

♦ (5) :

Supposons que $A\Delta B=\emptyset$. Donc $(A\cup B)-(A\cap B)=\emptyset$. Donc d'après la proposition 24 page 27, on a $A\cup B\subseteq A\cap B$. On a donc $B \underset{16\text{ p. }16}{\subseteq} A\cup B\subseteq A\cap B \underset{22\text{ p. }23}{\subseteq} A$ donc par transitivité de l'inclusion, $B\subseteq A$. On prouve de même que $A\subseteq B$, et donc $\boxed{A=B}$.

♦ (6) :

Supposons que $A\Delta C=B\Delta C$. On a donc :

$A \underset{(3)}{=} A\Delta\emptyset \underset{(4)}{=} A\Delta(C\Delta C) \underset{(1)}{=} (A\Delta C)\Delta C = (B\Delta C)\Delta C \underset{(1)}{=} B\Delta(C\Delta C) \underset{(4)}{=} B\Delta\emptyset \underset{(3)}{=} B.$

Donc par transitivité de l'égalité, on a $\boxed{A=B}$.

**CQFD**.

## Proposition 32 (Différence symétrique, réunion et intersection)

Soient $A$, $B$ et $C$ trois ensembles. On a alors :

(1) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

On dit que l'intersection est **distributive** sur la différence symétrique.

(2) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

*Démonstration*

♦ (1) :

Soit $x$ un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x\in A\cap(B\Delta C)\\
\Longleftrightarrow\ & x\in A \text{ et } x\in B\Delta C\\
\Longleftrightarrow\ & x\in A \text{ et } (x\in B \text{ xor } x\in C)\\
\Longleftrightarrow\ & (x\in A \text{ et } x\in B) \text{ xor } (x\in A \text{ et } x\in C)\\
\Longleftrightarrow\ & x\in A\cap B \text{ xor } x\in A\cap C\\
\Longleftrightarrow\ & x\in (A\cap B)\Delta(A\cap C).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x, \big(x \in A \cap (B \Delta C) \iff x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)\big)$

Donc $\boxed{A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)}$.

♦ (2) :

$$
\begin{aligned}
& A \Delta B = (A \cup B) - (A \Delta B) \\
\underset{25 \text{ p. } 29}{=} \ & \Big[(A \cup B) - A\Big] \cup \Big[(A \cup B) - B\Big] \\
\underset{26 \text{ p. } 32}{=} \ & \Big[(A - A) \cup (B - A)\Big] \cup \Big[(A - B) \cup (B - B)\Big] \\
\underset{24 \text{ p. } 27}{=} \ & \Big[\emptyset \cup (B - A)\Big] \cup \Big[(A - B) \cup (B - B)\Big] \\
\underset{16 \text{ p. } 16}{=} \ & (B - A) \cup \Big[(A - B) \cup (B - B)\Big] \\
\underset{24 \text{ p. } 27}{=} \ & (B - A) \cup \Big[(A - B) \cup \emptyset\Big] \\
\underset{16 \text{ p. } 16}{=} \ & (B - A) \cup (A - B)
\end{aligned}
$$

Donc par transitivité de l'égalité, on a $\boxed{A \Delta B = (B - A) \cup (A - B)}$.

**CQFD**.

## Proposition 33 (Différence symétrique et complémentaire)

Soit $E$ un ensemble. Soient $A$ et $B$ des parties de $E$. On a alors :

(1) $A \Delta B = \big(A \cap \complement_E B\big) \cup (B \cap \complement_E A)$.

(2) $A \Delta E = \complement_E A$

(3) $A \Delta \left(\complement_E A\right) = E$

(4) $\complement_E (A \Delta B) = \left(\complement_E A\right) \Delta B = A \Delta \left(\complement_E B\right)$

*Démonstration*

♦ (1) :

$$A \Delta B \underset{32 \text{ p. } 40}{=} (A - B) \cup (B - A) \underset{28 \text{ p. } 36}{=} \big(A \cap \complement_E B\big) \cup (B - A) \underset{28 \text{ p. } 36}{=} \big(A \cap \complement_E B\big) \cup \big(B \cap \complement_E A\big)$$

♦ (2) :
$A\Delta E = (A \cup E) - (A \cap E) \underset{16 \text{ p. } 16}{=} E - (A \cap E) \underset{22 \text{ p. } 23}{=} E - A = \complement_E A$

♦ (3) :
$A\Delta \left(\complement_E A\right) = \left(A \cup \complement_E A\right) - \left(A \cap \complement_E A\right) \underset{27 \text{ p. } 35}{=} E - \left(A \cap \complement_E A\right) \underset{27 \text{ p. } 35}{=} E - \emptyset \underset{24 \text{ p. } 27}{=} E$

♦ (4) :
Commençons par prouver que $\complement_E(A\Delta B) = \left(\complement_E A\right)\Delta B$.

$\boxed{\complement_E(A\Delta B)} \underset{(2)}{=} (A\Delta B)\Delta E \underset{31 \text{ p. } 39}{=} E\Delta(A\Delta B) \underset{31 \text{ p. } 39}{=} (E\Delta A)\Delta B \underset{31 \text{ p. } 39}{=} (A\Delta E)\Delta B \underset{(2)}{=} \boxed{\left(\complement_E A\right)\Delta B}$
$\underset{(2)}{=} (A\Delta E)\Delta B \underset{31 \text{ p. } 39}{=} (E\Delta A)\Delta B \underset{31 \text{ p. } 39}{=} E\Delta(A\Delta B) \underset{31 \text{ p. } 39}{=} (A\Delta B)\Delta E \underset{31 \text{ p. } 39}{=} A\Delta(B\Delta E)$
$\underset{(2)}{=} \boxed{A\Delta\left(\complement_E B\right)}$.

Finalement, $\boxed{\complement_E(A\Delta B) = \left(\complement_E A\right)\Delta B = A\Delta\left(\complement_E B\right)}$.

**CQFD**.

**Remarque** :
Les différentes propriétés de l'union, de l'intersection, de la différence, du complémentaire et de la différence symétrique seront redémontrées dans le cadre des **fonctions indicatrices**, en prenant bien garde à ne pas utiliser ce qui est à redémontrer !

Chapitre 2

# Généralités sur les relations binaires

## Sommaire

# 1 Couples et produit cartésien

## 1.1 Couples

**Définition 16 (Couple)**

Soient $x$ et $y$ deux ensembles.

On appelle **couple** de première composante $x$ et de deuxième composante $y$ l'ensemble $\Big\{\{x\};\{x;y\}\Big\}$.
On le note plutôt $(x;y)$.

**Pour la petite histoire**

• **Kazimierz Kuratowski** (1896-1980) est un mathématicien polonais.

• Les recherches de Kuratowski portaient principalement sur la topologie abstraite et les structures d'espace métrique. Avec Alfred Tarski et Wacław Sierpiński, il a développé la théorie des espaces polonais (nommés ainsi en hommage au groupe de mathématiciens polonais à l'origine de cette théorie).

• C'est à lui que l'on doit cette définition des couples.

**Proposition 34 (Couples et égalité)**

Soient $x$, $y$, $a$ et $b$ quatre ensembles. On a l'équivalence suivante :

$(x;y)=(a;b) \iff (x=a \text{ et } y=b)$

*Démonstration*

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons donc que $(x;y)=(a;b)$.

♦ Commençons par remarquer que pour $c$ et $d$ deux ensembles,
on a $\bigcup(c;d)=\bigcup\Big\{\{c\};\{c;d\}\Big\}=\{c\}\cup\{c;d\}=\{c;d\}$.

En particulier, on a $\{x;y\} = \bigcup(x;y) = \bigcup(a;b) = \{a;b\}$.
Deux cas se présentent à nous :

♦ Premier cas : $x = y$.
Dans ce cas $\{x;y\} = \{x\}$, donc $\{a;b\} = \{x\}$ donc $a \in \{x\}$ et $b \in \{x\}$ et donc $a = x = b$.
Ainsi, $x = y = a = b$, et donc $\boxed{x = a \text{ et } y = b}$.

♦ Deuxième cas : $x \neq y$.
Si jamais on avait $a = b$, alors d'après le premier cas, en échangeant le rôle de $x$ et $a$ et celui de $y$ et $b$, on aurait $x = y$. Donc par l'absurde, on a bien aussi $a \neq b$.

Remarquons que l'on a $\Big\{\{x\}\Big\} = \Big\{\{x\};\{x;y\}\Big\} - \Big\{\{x;y\}\Big\} = (x;y) - \Big\{\{x;y\}\Big\}$
$= (a;b) - \Big\{\{x;y\}\Big\} = (a;b) - \Big\{\{a;b\}\Big\} = \Big\{\{a\};\{a;b\}\Big\} - \Big\{\{a;b\}\Big\} = \Big\{\{a\}\Big\}$.
On a donc $\Big\{\{x\}\Big\} = \Big\{\{a\}\Big\}$ donc $\{x\} = \{a\}$ donc $x = a$.

On en déduit que l'on a $\{y\} = \{x;y\} - \{x\} = \{x;y\} - \{a\} = \{a;b\} - \{a\} = \{b\}$
donc $\{y\} = \{b\}$ donc $y = b$. Ainsi, $\boxed{x = a \text{ et } y = b}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que l'on ait $x = a$ et $y = b$.
Alors $(x;y) = \Big\{\{x\};\{x;y\}\Big\} = \Big\{\{a\};\{a;y\}\Big\} = \Big\{\{a\};\{a;b\}\Big\} = (a;b)$.
Donc $\boxed{(x;y) = (a;b)}$.

**CQFD**.

**Remarque** :
Remarquons pour la suite que pour $x$ et $y$ deux ensembles, $\{x\}$ et $\{x;y\}$ sont des éléments de $\mathcal{P}(\{x\} \cup \{y\})$ donc $(x;y) = \Big\{\{x\};\{x;y\}\Big\}$ est une partie de $\mathcal{P}(\{x\} \cup \{y\})$, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\{x\} \cup \{y\})\Big)$.

## 1.2 Produit cartésien

**Définition 17 (Produit cartésien)**

Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

• On appelle **produit cartésien** de $A$ par $B$ le ensemble
$\left\{C \in \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(A \cup B)\Big) \;\Big|\; \exists a \in A, \exists b \in B, C = (a;b)\right\}$.
On le note plutôt $A \times B$.

• L'ensemble $A \times A$ sera plutôt noté $A^2$.

**Proposition 35**

Soient $A$ et $B$ deux ensembles.

(1) Si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, alors $A \times B = \emptyset$.
(2) Si $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, alors $A \times B \neq \emptyset$.

*Démonstration*

♦ (1) :
Supposons que $A = \emptyset$ ou que $B = \emptyset$.
Alors pour tout $C \in \Big(\mathcal{P}(A \cup B)\Big)$, on a $\neg(\exists a \in A, \exists b \in B, (a;b) \in C)$ donc $C \notin A \times B$. Donc $A \times B = \emptyset$.

♦ (2) :
Si $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$. Donc $(a;b) \in A \times B$. Donc $A \times B \neq \emptyset$.
**CQFD**.

**Proposition 36**

Soient $E$, $E'$, $F$ et $F'$ quatre ensembles.

Si $E' \subseteq E$ et $F' \subseteq F$, alors $E' \times F' \subseteq E \times F$.
On dit que le produit cartésien est **compatible** avec l'inclusion.

*Démonstration*

Supposons que $E' \subseteq E$ et $F' \subseteq F$. Soit $z$ un ensemble.
Si $z \in E' \times F'$, alors il existe $x \in E'$ et $y \in F'$ tels que $z = (x; y)$. Or par hypothèse, on a $E' \subseteq E$ et $F' \subseteq F$ donc $x \in E$ et $y \in F$ et donc $z = (x; y) \in E \times F$.
Ainsi, $\forall z, \Big(z \in E' \times F' \Rightarrow z \in E \times F\Big)$.
Donc $\boxed{E' \times F' \subseteq E \times F}$.
**CQFD**.

# 2 Graphes

## 2.1 Diagonales

**Définition 18 (Diagonales d'un produit cartésien)**

Soit $E$ un ensemble.

On appelle **diagonale** de $E^2$ le ensemble $\{(e; e') \in E^2 \mid e = e'\}$.
On le note parfois $\Delta_E$.

## 2.2 Graphes

**Définition 19 (Graphe)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

On appelle **graphe** de $E$ dans $F$ toute partie de $E \times F$.

**Proposition 37**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

$(1)$ La diagonale de $E^2$ est un graphe de $E$ dans $E$.

$(2)$ Si $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$, alors toute partie $\Gamma' \subseteq \Gamma$ est aussi un graphe de $E$ dans $F$.

$(3)$ Si $E'$ est une partie de $E$, et $F'$ est une partie de $F$, alors tout graphe de $E'$ dans $F'$ est un graphe de $E$ dans $F$.

$(4)$ Si $\Gamma$ et $\Gamma'$ sont des graphes de $E$ dans $F$, alors $\Gamma \cup \Gamma'$ et $\Gamma \cap \Gamma'$ sont des graphes de $E$ dans $F$.

*Démonstration*

♦ $(1)$ :
C'est immédiat puisque la diagonale de $E^2$ est par définition une partie de $E \times E$.

♦ $(2)$ :
On a donc $\Gamma' \subseteq \Gamma \subseteq E \times F$ donc par transitivité de l'inclusion, on a $\Gamma' \subseteq E \times F$,
donc $\Gamma'$ est une partie de $E \times F$, donc $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$.

♦ $(3)$ :
Soient $E'$ et $F'$ deux ensembles. Supposons que $E' \subseteq E$ et $F' \subseteq F$.
Soit $\Gamma$ un graphe de $E'$ dans $F'$. On a donc $\Gamma \subseteq E' \times F'$.
Or, d'après la proposition 36 page 46, on a $E' \times F' \subseteq E \times F$.
Donc par transitivité de l'inclusion, on a $\Gamma \subseteq E \times F$.
Donc $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$.

♦ $(4)$ :
Soient $\Gamma$ et $\Gamma'$ des graphes de $E$ dans $F$. Alors on a $\Gamma \subseteq E \times F$ et $\Gamma' \subseteq E \times F$.
Donc d'après la proposition 16 page 16, on a $\Gamma \cup \Gamma' \subseteq E \times F$ donc $\Gamma \cup \Gamma'$ est un graphe de $E$ dans $F$.
De même, on a $\Gamma \cap \Gamma' \subseteq \Gamma \subseteq E \times F$ donc par transitivité de l'inclusion, on a $\Gamma \cap \Gamma' \subseteq E \times F$ donc
$\Gamma \cap \Gamma'$ est un graphe de $E$ dans $F$.

## Proposition 38

Soient $E$, $E'$, $F$ et $F'$ quatre ensembles. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.
Supposons que $\Gamma$ est aussi un graphe de $E'$ dans $F'$.

(1) Alors $\{x \in E \mid \exists y \in F, (x;y) \in \Gamma\} = \{x \in E' \mid \exists y \in F', (x;y) \in \Gamma\}$.

(2) Alors $\{y \in F \mid \exists x \in E, (x;y) \in \Gamma\} = \{y \in F' \mid \exists x \in E', (x;y) \in \Gamma\}$

*Démonstration*

Comme $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$ et un graphe de $E'$ dans $F'$, on a $\Gamma \subseteq E \times F$ et $\Gamma \subseteq E' \times F'$.

♦ (1) :
Notons $D_{E,F} := \{x \in E \mid \exists y \in F, (x;y) \in \Gamma\}$ et $D_{E';F'} := \{x \in E' \mid \exists y \in F', (x;y) \in \Gamma\}$.
Soit $x$ un ensemble.
Supposons que $x \in D_{E;F}$. Alors il existe $y \in F$ tel que $(x;y) \in \Gamma$.
Or, on a dit que $\Gamma \subseteq E' \times F'$ donc $(x;y) \in E' \times F'$ donc $x \in E'$ et $y \in F'$.
Ainsi, on a $x \in E'$ et il existe $y \in F'$ tel que $(x;y) \in \Gamma$. Donc $x \in D_{E';F'}$.
Ainsi, $\forall x, \Big(x \in D_{E;F} \Rightarrow x \in D_{E';F'}\Big)$. Donc $D_{E;F} \subseteq D_{E';F'}$.

On montre en échangeant le rôle de $E$ et $E'$, et le rôle de $F$ et $F'$, que $D_{E;F} \supseteq D_{E';F'}$.
Ainsi, par double inclusion, on a $\boxed{D_{E;F} = D_{E';F'}}$.

♦ (2) :
Notons $I_{E,F} := \{y \in F \mid \exists x \in E, (x;y) \in \Gamma\}$ et $I_{E';F'} := \{y \in F' \mid \exists x \in E', (x;y) \in \Gamma\}$.
Soit $y$ un ensemble.
Supposons que $y \in I_{E;F}$. Alors il existe $x \in E$ tel que $(x;y) \in \Gamma$.
Or, on a dit que $\Gamma \subseteq E' \times F'$ donc $(x;y) \in E' \times F'$ donc $x \in E'$ et $y \in F'$.
Ainsi, on a $y \in F'$ et il existe $x \in F'$ tel que $(x;y) \in \Gamma$. Donc $y \in I_{E';F'}$.
Ainsi, $\forall y, \Big(y \in I_{E;F} \Rightarrow y \in I_{E';F'}\Big)$. Donc $I_{E;F} \subseteq I_{E';F'}$.

On montre en échangeant le rôle de $E$ et $E'$, et le rôle de $F$ et $F'$, que $I_{E;F} \supseteq I_{E';F'}$.
Ainsi, par double inclusion, on a $\boxed{I_{E;F} = I_{E';F'}}$.

**CQFD**.

### Définition 20 (Domaine et image d'un graphe)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.
La proposition précédente nous assure que les ensembles suivantes ne dépendent ni de $E$, ni de $F$.

$(1)$ On appelle **domaine** de $\Gamma$ la partie de $E$ définie par $\{x \in E \mid \exists y \in F, (x; y) \in \Gamma\}$.
On le note $\mathrm{dom}(\Gamma)$.

$(2)$ On appelle **image** de $\Gamma$ la partie de $F$ définie par $\{y \in F \mid \exists x \in E, (x; y) \in \Gamma\}$.
On le note $\mathrm{im}(\Gamma)$.

### Proposition 39 (Unicité du graphe du vide)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.

Si $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$, alors $\Gamma = \emptyset$.
En particulier, tous les graphes du vide dans lui-même sont égaux.

*Démonstration*

Supposons que $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
$\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$ donc $\Gamma \subseteq E \times F \underset{35 \text{ p. } 46}{=} \emptyset$ donc $\Gamma = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.
**CQFD**.

## 2.3 Composition de graphes

### Proposition 40

Soient $E$, $E'$, $F$, $F'$, $G$ et $G'$ six ensembles.
Soient $\Gamma_1$ un graphe de $E$ dans $F$ et $\Gamma_2$ un graphe de $F$ dans $G$.
Supposons que $\Gamma_1$ est aussi un graphe de $E'$ dans $F'$ et que $\Gamma_2$ est aussi un graphe de $F'$ dans $G'$.

Posons $C := \{(x; z) \in E \times G \mid \exists y \in F, (x; y) \in \Gamma_1 \text{ et } (y; z) \in \Gamma_2\}$
et posons $C' := \{(x; z) \in E' \times G' \mid \exists y \in F', (x; y) \in \Gamma_1 \text{ et } (y; z) \in \Gamma_2\}$.

On a alors $C = C'$.

*Démonstration*

Comme $\Gamma_1$ est à la fois un graphe de $E$ dans $F$ et un graphe de $E'$ dans $F'$,
on a $\Gamma_1 \subseteq E \times F$ et $\Gamma_1 \subseteq E' \times F'$.
De même, comme $\Gamma_2$ est à la fois un graphe de $F$ dans $G$ et un graphe de $F'$ dans $G'$,
on a $\Gamma_2 \subseteq F \times G$ et $\Gamma_2 \subseteq F' \times G'$.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $c$ un ensemble. Supposons que $c \in C$.
Il existe donc $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$ tels que $c = (x; z)$ et $(x; y) \in \Gamma_1$ et $(y; z) \in \Gamma_2$.
Or, $\Gamma_1 \subseteq E' \times F'$ et $\Gamma_2 \subseteq F' \times G'$ donc $(x; y) \in E' \times F'$ et $(y; z) \in F' \times G'$.
Donc $x \in E'$, $y \in F'$ et $z \in G'$.
On a donc $c = (x; z) \in E' \times G'$ et $\exists y \in F', (x; y) \in \Gamma_1$ et $(y; z) \in \Gamma_2$. Donc $c \in C'$.
Ainsi, $\forall c, \Big(c \in C \Rightarrow c \in C'\Big)$.
Donc $C \subseteq C'$.

$\boxed{\supseteq}$ Par un raisonnement identique, on montre que $C \supseteq C'$.

Donc par double inclusion, on a $\boxed{C = C'}$.

**CQFD**.

## Définition 21 (Composition de deux graphes)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.
Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$, et $\Gamma'$ un graphe de $F$ dans $G$.

La proposition précédente nous assure que le ensemble suivant ne dépend pas ni de $E$, ni de $F$, ni de $G$.

• On appelle **composé** de $\Gamma'$ par $\Gamma$ le graphe de $E$ dans $G$ défini par $\{(x; z) \in E \times G \mid \exists y \in F, (x; y) \in \Gamma \text{ et } (y; z) \in \Gamma'\}$.
On le note plutôt $\Gamma' \circ \Gamma$.

• Dans le cas où $E = F = G$, on note $\Gamma^2$ plutôt que $\Gamma \circ \Gamma$.

**Attention !**

On prendra garde à ne pas confondre $\Gamma \times \Gamma$ et $\Gamma \circ \Gamma$, qui se notent tous les deux $\Gamma^2$.
En cas de doute, il sera précisé de quel ensemble on parle.

**Proposition 41 (Associativité de la composition)**

Soient $A$,$B$,$C$ et $D$ quatre ensembles.

Soient $\Gamma_A^B$ un graphe de $A$ dans $B$, $\Gamma_B^C$ un graphe de $B$ dans $C$, et $\Gamma_C^D$ un graphe de $C$ dans $D$.

On a alors $(\Gamma_C^D \circ \Gamma_B^C) \circ \Gamma_A^B = \Gamma_C^D \circ (\Gamma_B^C \circ \Gamma_A^B)$.

On dit que la composition de graphes est **associative**.

*Démonstration*

• Si $A$ est vide ou si $D$ est vide, alors $A \times D$ est vide, donc comme $(\Gamma_C^D \circ \Gamma_B^C) \circ \Gamma_A^B$ et $\Gamma_C^D \circ (\Gamma_B^C \circ \Gamma_A^B)$ sont des parties de $A \times D$, ils sont tous les deux vides et donc égaux.

• Supposons donc que $A$ et $D$ sont non vides.

D'après la proposition 35 page 46, $A \times B \neq \emptyset$.

Soit $z \in A \times D$.

Il existe donc $a \in A$ et $d \in D$ tels que $z = (a; d)$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& z \in (\Gamma_C^D \circ \Gamma_B^C) \circ \Gamma_A^B \\
\iff & (a; d) \in (\Gamma_C^D \circ \Gamma_B^C) \circ \Gamma_A^B \\
\iff & \exists b \in B, (a; b) \in \Gamma_A^B \text{ et } (b; d) \in \Gamma_C^D \circ \Gamma_B^C \\
\iff & \exists b \in B, (a; b) \in \Gamma_A^B \text{ et } \left(\exists c \in C, (b; c) \in \Gamma_B^C \text{ et } (c; d) \in \Gamma_C^D\right) \\
\iff & \exists b \in B, \exists c \in C, (a; b) \in \Gamma_A^B \text{ et } (b; c) \in \Gamma_B^C \text{ et } (c; d) \in \Gamma_C^D \\
\iff & \exists c \in C, \exists b \in B, (a; b) \in \Gamma_A^B \text{ et } (b; c) \in \Gamma_B^C \text{ et } (c; d) \in \Gamma_C^D \\
\iff & \exists c \in C, \left(\exists b \in B, (a; b) \in \Gamma_A^B \text{ et } (b; c) \in \Gamma_B^C\right) \text{ et } (c; d) \in \Gamma_C^D \\
\iff & \exists c \in C, (a; c) \in \Gamma_B^C \circ \Gamma_A^B \text{ et } (c; d) \in \Gamma_C^D \\
\iff & (a; d) \in \Gamma_C^D \circ (\Gamma_B^C \circ \Gamma_A^B) \\
\iff & z \in \Gamma_C^D \circ (\Gamma_B^C \circ \Gamma_A^B)
\end{aligned}$$

Ainsi, $z \in (\Gamma_C^D \circ \Gamma_B^C) \circ \Gamma_A^B \iff z \in \Gamma_C^D \circ (\Gamma_B^C \circ \Gamma_A^B)$.

Ceci étant vrai pour tout $z$ dans $A \times D$, on a donc bien $\boxed{(\Gamma_C^D \circ \Gamma_B^C) \circ \Gamma_A^B = \Gamma_C^D \circ (\Gamma_B^C \circ \Gamma_A^B)}$.

**CQFD**.

## Proposition 42 (Absorbance du vide)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.

On a alors $\Gamma \circ \emptyset = \emptyset = \emptyset \circ \Gamma$.

On dit que l'ensemble vide est **absorbant** pour la composition de graphes.

*Démonstration*

♦ Commençons par montrer que $\Gamma \circ \emptyset = \emptyset$.
Comme $\emptyset$ est une partie de tout ensemble, c'est une partie de n'importe quel produit cartésien et donc c'est un graphe de n'importe quel ensemble dans n'importe quel ensemble.

En particulier, $\emptyset$ est un graphe de $E$ dans $E$, et donc $\Gamma \circ \emptyset$ est bien défini en tant que graphe de $E$ dans $F$.

Si jamais $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$, alors d'après la proposition 35 page 46, on a $E \times F = \emptyset$ donc $\Gamma \circ \emptyset$ étant une partie de $E \times F$, on a $\Gamma \circ \emptyset = \emptyset$.

Supposons donc que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
Donc d'après la proposition 35 page 46, on a $E \times F \neq \emptyset$.
Soit donc $u \in E \times F$. Il existe donc $x \in E$ et $z \in F$ tels que $u = (x; z)$.
Si jamais on avait $u \in \Gamma \circ \emptyset$, alors $(x; z) \in \Gamma \circ \emptyset$, donc il existerait $y \in E$ tel que $(x; y) \in \emptyset$ et $(y; z) \in \Gamma$.
Or, $(x; y) \in \emptyset$ étant impossible, par contraposition on a $(x; z) \notin \Gamma \circ \emptyset$ donc $u \notin \Gamma \circ \emptyset$.
Ceci étant vrai pour tout élément $u$ de $E \times F$, on a $\boxed{\Gamma \circ \emptyset = \emptyset}$.

♦ On montre par un raisonnement similaire que $\boxed{\emptyset \circ \Gamma = \emptyset}$.
**CQFD**.

## Proposition 43 (Neutralité de la diagonale)

Soit $E$ un ensemble. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $E$.

On a alors $\Gamma \circ \Delta_E = \Gamma = \Delta_E \circ \Gamma$.

On dit que la diagonale de $E^2$ est **l'élément neutre** de la composition des graphes de $E$ dans $E$.

*Démonstration*

• Si $E = \emptyset$, alors $E^2 = \emptyset$ d'après la proposition 35 page 46.
Donc $\Gamma \circ \Delta_E$, $\Gamma$ et $\Delta_E \circ \Gamma$ étant des parties de $E^2$, elles sont toutes vides et sont donc égales.

• Supposons donc $E \neq \emptyset$. Donc $E^2 \neq \emptyset$ d'après la proposition 35 page 46.

♦ **Commençons par montrer que $\Gamma \circ \Delta_E = \Gamma$.**

Soit $u \in E^2$.

Il existe donc $x$ et $z$ dans $E$ tels que $u = (x; z)$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & u \in \Gamma \circ \Delta_E \\ \iff & (x; z) \in \Gamma \circ \Delta_E \\ \iff & \exists y \in E, (x; y) \in \Delta_E \text{ et } (y; z) \in \Gamma \\ \iff & \exists y \in E, x = y \text{ et } (y; z) \in \Gamma \\ \iff & (x; z) \in \Gamma \\ \iff & u \in \Gamma \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall u \in E^2, \Big(u \in \Gamma \circ \Delta_E \iff u \in \Gamma\Big)$.

Donc $\boxed{\Gamma \circ \Delta_E = \Gamma}$.

♦ **Montrons à présent que $\Delta_E \circ \Gamma = \Gamma$**

Soit $u \in E^2$.

Il existe donc $x$ et $z$ dans $E$ tels que $u = (x; z)$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & u \in \Delta_E \circ \Gamma \\ \iff & (x; z) \in \Delta_E \circ \Gamma \\ \iff & \exists y \in E, (x; y) \in \Gamma \text{ et } (y; z) \in \Delta_E \\ \iff & \exists y \in E, (x; y) \in \Gamma \text{ et } y = z \\ \iff & (x; z) \in \Gamma \\ \iff & u \in \Gamma \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall u \in E^2, \Big(u \in \Delta_E \circ \Gamma \iff u \in \Gamma\Big)$.

Donc $\boxed{\Delta_E \circ \Gamma = \Gamma}$.

**CQFD**.

## 2.4 Graphe transposé

**Proposition 44**

Soient $E$, $E'$, $F$ et $F'$ quatre ensembles. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.
Supposons que $\Gamma$ est aussi un graphe de $E'$ dans $F'$.

Alors $\{(y;x) \in F \times E \mid (x;y) \in \Gamma\} = \{(y;x) \in F' \times E' \mid (x;y) \in \Gamma\}$

*Démonstration*

Notons $T_{E;F} := \{(y;x) \in F \times E \mid (x;y) \in \Gamma\}$ et $T_{E';F'} := \{(y;x) \in F' \times E' \mid (x;y) \in \Gamma\}$.

Raisonnons par double inclusion :
$\boxed{\subseteq}$ Soit $z$ un ensemble.
Supposons que $z \in T_{E;F}$.
Il existe donc $y \in F$ et $x \in E$ tels que $z = (y;x)$ et $(x;y) \in \Gamma$.
Or, par hypothèse $\Gamma$ est un graphe de $E'$ dans $F'$, donc $\Gamma \subseteq E' \times F'$.
Donc $(x;y) \in E' \times F'$, donc $x \in E'$ et $y \in F'$, donc $z = (y;x) \in F' \times E'$.
Ainsi, on a $z = (y;x)$, $(y;x) \in F' \times E'$ et $(x;y) \in \Gamma$.
Donc $z \in T_{E';F'}$.
Ainsi, $\forall z, \Big(z \in T_{E;F} \Rightarrow z \in T_{E';F'}\Big)$.
Donc $T_{E;F} \subseteq T_{E';F'}$.

$\boxed{\supseteq}$ Par un raisonnement identique, on montre que $T_{E;F} \supseteq T_{E';F'}$.

Donc par double inclusion, on a $\boxed{T_{E;F} = T_{E';F'}}$.
**CQFD**.

**Définition 22 (Graphe transposé)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.

• On appelle **graphe transposé** de $\Gamma$ le graphe de $F$ dans $E$ défini par $\{(y;x) \in F \times E \mid (x;y) \in \Gamma\}$.
On le note plutôt ${}^t\Gamma$.

• On dit aussi que c'est le **graphe inverse**, ou bien le **graphe réciproque** de $\Gamma$.

## Proposition 45

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Si l'on considère $\emptyset$ en tant que graphe de $E$ dans $F$, alors ${}^t\emptyset = \emptyset$.

*Démonstration*

• Si $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$, alors d'après la proposition 35 page 46, on a $F \times E = \emptyset$. Or, par définition ${}^t\emptyset$ est une partie de $F \times E$, donc $\boxed{{}^t\emptyset = \emptyset}$.

• Si $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$, alors d'après la proposition 35 page 46, $F \times E$ n'est pas vide.

Soit $u \in F \times E$.

Il existe donc $y \in F$ et $x \in E$ tels que $u = (y; x)$.

On a alors $(y; x) \in {}^t\emptyset \iff (x; y) \in \emptyset$.

En particulier, on a donc $(y; x) \in {}^t\emptyset \Rightarrow (x; y) \in \emptyset$.

Donc par contraposition, on a $(x; y) \notin \emptyset \Rightarrow (y; x) \notin {}^t\emptyset$.

Donc par modus ponens, on a $(y; x) \notin {}^t\emptyset$.

Donc $u \notin {}^t\emptyset$.

Donc $\forall u \in F \times E, u \notin {}^t\emptyset$.

On en déduit que $\boxed{{}^t\emptyset = \emptyset}$.

**CQFD**.

## Proposition 46 (Involution du graphe transposé)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.

On a alors ${}^t({}^t\Gamma) = \Gamma$.

On dit que le fait de passer à la transposée d'un graphe est une **involution**.

*Démonstration*

On sait que $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$, donc ${}^t\Gamma$ est un graphe de $F$ dans $E$, donc ${}^t({}^t\Gamma)$ est bien un graphe de $E$ dans $F$.

• Si $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$, alors $E \times F = \emptyset$ d'après la proposition 35 page 46.

Or, $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$ donc $\Gamma \subseteq E \times F = \emptyset$.

Donc $\Gamma = \emptyset$ d'après la proposition 7 page 8.

Donc ${}^t\Gamma = \emptyset$ d'après la proposition 45 page 56.

Donc ${}^t({}^t\Gamma) = \emptyset = \Gamma$ toujours d'après la même proposition.

Donc $\boxed{{}^t({}^t\Gamma) = \Gamma}$.

• Si $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$, alors $E \times F \neq \emptyset$ d'après la proposition 35 page 46.

Soit $u \in E \times F$.

Il existe donc $x \in E$ et $y \in F$ tels que $u = (x; y)$.

On a alors $u \in {}^t({}^t\Gamma) \iff (x; y) \in {}^t({}^t\Gamma) \iff (y; x) \in {}^t\Gamma \iff (x; y) \in \Gamma \iff u \in \Gamma$.

Donc $u \in {}^t({}^t\Gamma) \iff u \in \Gamma$.

Donc $\forall u \in E \times F, u \in {}^t({}^t\Gamma) \iff u \in \Gamma$.

On en déduit que $\boxed{{}^t({}^t\Gamma) = \Gamma}$.

**CQFD**.

## Proposition 47

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.

On a alors :

$(1)$ dom $({}^t\Gamma) = \text{im}(\Gamma)$

$(2)$ im $({}^t\Gamma) = \text{dom}(\Gamma)$

*Démonstration*

♦ $(1)$ :

dom $({}^t\Gamma) = \{y \in F \mid \exists x \in E, (y; x) \in {}^t\Gamma\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, (x; y) \in \Gamma\} = \text{im}(\Gamma)$

♦ $(2)$ :

im $({}^t\Gamma) = \{x \in E \mid \exists y \in F, (y; x) \in {}^t\Gamma\} = \{x \in E \mid \exists y \in F, (x; y) \in \Gamma\} = \text{dom}(\Gamma)$

**CQFD**.

## Proposition 48

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.

Soient $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$, et $\Sigma$ un graphe de $F$ dans $G$.

Alors ${}^t(\Sigma \circ \Gamma) = {}^t\Gamma \circ {}^t\Sigma$

*Démonstration*

• Si $E = \emptyset$, alors $E \times F = \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.
Or, $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$, donc $\Gamma \subseteq E \times F = \emptyset$.
Donc $\Gamma = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.

Donc ${}^t(\Sigma \circ \Gamma) = {}^t(\Sigma \circ \emptyset) \underset{42 \text{ p. } 53}{=} {}^t\emptyset \underset{45 \text{ p. } 56}{=} \emptyset$.

De même, ${}^t\Gamma \circ {}^t\Sigma = {}^t\emptyset \circ {}^t\Sigma \underset{45 \text{ p. } 56}{=} \emptyset \circ {}^t\Sigma \underset{42 \text{ p. } 53}{=} \emptyset$.

Ainsi, ${}^t(\Sigma \circ \Gamma) = \emptyset = {}^t\Gamma \circ {}^t\Sigma$. Et donc $\boxed{{}^t(\Sigma \circ \Gamma) = {}^t\Gamma \circ {}^t\Sigma}$.

• On montre avec une démonstration similaire que c'est vrai si $G = \emptyset$.

• Si $E \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$, alors $G \times E \neq \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.
Soit $u \in G \times E$. Il existe donc $z \in G$ et $x \in E$ tels que $u = (z; x)$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& u \in {}^t(\Sigma \circ \Gamma) \\
\iff & (z; x) \in {}^t(\Sigma \circ \Gamma) \\
\iff & (x; z) \in \Sigma \circ \Gamma \\
\iff & \exists y \in F, (x; y) \in \Gamma \text{ et } (y; z) \in \Sigma \\
\iff & \exists y \in F, (y; x) \in {}^t\Gamma \text{ et } (z; y) \in {}^t\Sigma \\
\iff & \exists y \in F, (z; y) \in {}^t\Sigma \text{ et } (y; x) \in {}^t\Gamma \\
\iff & (z; x) \in {}^t\Gamma \circ {}^t\Sigma \\
\iff & u \in {}^t\Gamma \circ {}^t\Sigma
\end{aligned}$$

Donc $u \in {}^t(\Sigma \circ \Gamma) \iff u \in {}^t\Gamma \circ {}^t\Sigma$.
Ceci étant vrai pour tout $u \in G \times E$, on a donc $\boxed{{}^t(\Sigma \circ \Gamma) = {}^t\Gamma \circ {}^t\Sigma}$.
**CQFD**.

## Proposition 49 (Complémentaire et graphe transposé)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.

On a alors $\complement_{F \times E}\left({}^t\Gamma\right) = {}^t\left(\complement_{E \times F}\Gamma\right)$.

*Démonstration*

• Si $E=\emptyset$ ou $F=\emptyset$, alors $E\times F=\emptyset$ et $F\times E=\emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.
Donc comme $\complement_{F\times E}\left({}^t\Gamma\right)\subseteq F\times E$, on a $\complement_{F\times E}\left({}^t\Gamma\right)=\emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.
De même, comme $\complement_{E\times F}\Gamma\subseteq E\times F$, on a $\complement_{E\times F}\Gamma=\emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.
Donc ${}^t\left(\complement_{E\times F}\Gamma\right)=\emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.

Finalement, $\complement_{F\times E}\left({}^t\Gamma\right)=\emptyset={}^t\left(\complement_{E\times F}\Gamma\right)$, et donc $\boxed{\complement_{F\times E}\left({}^t\Gamma\right)={}^t\left(\complement_{E\times F}\Gamma\right)}$.

• Si $E\neq\emptyset$ et $F\neq\emptyset$, alors $F\times E$ d'après la prop. 35 p. 46.

Soit $u\in F\times E$. Il existe donc $y\in F$ et $x\in E$ tels que $u=(y;x)$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& u\in\complement_{F\times E}\left({}^t\Gamma\right)\\
\Longleftrightarrow\ & (y;x)\in\complement_{F\times E}\left({}^t\Gamma\right)\\
\Longleftrightarrow\ & (y;x)\notin{}^t\Gamma\\
\Longleftrightarrow\ & (x;y)\notin\Gamma\\
\Longleftrightarrow\ & (x;y)\in\complement_{E\times F}\Gamma\\
\Longleftrightarrow\ & (y;x)\in{}^t\left(\complement_{E\times F}\Gamma\right)\\
\Longleftrightarrow\ & u\in{}^t\left(\complement_{E\times F}\Gamma\right)
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $u\in F\times E$, on peut dire que $\boxed{\complement_{F\times E}\left({}^t\Gamma\right)={}^t\left(\complement_{E\times F}\Gamma\right)}$.

**CQFD**.

# 3 Relations

## 3.1 Relations binaires

**Définition 23 (Relation binaire)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble.

• On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation binaire** de $E$ dans $F$ si et seulement s'il existe $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$ tel que $\mathcal{R} = ((E;F);\Gamma)$.

• On dit alors que $E$ est **l'ensemble de départ** de $\mathcal{R}$.
• On dit alors que $F$ est **l'ensemble d'arrivée** de $\mathcal{R}$.
• On dit alors que $\Gamma$ est le **graphe** de $\mathcal{R}$.

• Pour $x \in E$ et $y \in F$, on notera $x\mathcal{R}y$ plutôt que $(x;y) \in \Gamma$.

• Si $E = F$, on dira simplement que $\mathcal{R}$ est une relation **sur** $E$.

**Proposition 50 (Egalité des relations binaires)**

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations binaires.

$\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ si et seulement si leurs ensembles de départs, d'arrivées et leur graphes sont égaux.

*Démonstration*

Ecrivons $\mathcal{R} = ((E;F);\Gamma)$ et $\mathcal{R} = ((E';F');\Gamma')$.

On a alors les équivalences suivantes :

$\mathcal{R} = \mathcal{R}'$

$\iff ((E;F);\Gamma) = ((E';F');\Gamma')$

$\iff (E;F) = (E';F')$ et $\Gamma = \Gamma'$ d'après 34 page 44

$\iff E = E'$ et $F = F'$ et $\Gamma = \Gamma'$ d'après 34 page 44

**CQFD**.

**Remarque 1**

Si $E$ est l'ensemble de départ et $F$ l'ensemble d'arrivée de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{R}'$, alors l'égalité entre leurs graphes peut se formuler $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}'y\Big)$.

En effet, en notant $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$ et $\Gamma'$ le graphe de $\mathcal{R}'$, on a les équivalences suivants :

$$\begin{aligned} & \Gamma = \Gamma' \\ \iff & \forall u \in E \times F, \Big(u \in \Gamma \iff u \in \Gamma'\Big) \\ \iff & \forall x \in E, \forall y \in F, \Big((x;y) \in \Gamma \iff (x;y) \in \Gamma'\Big) \\ \iff & \forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}'y\Big). \end{aligned}$$

## Proposition 51 (Existence de relations binaires)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Alors il existe au moins relation binaire de $E$ dans $F$.

*Démonstration*

Il suffit de considérer $\mathcal{R} = \Big((E;F); E \times F\Big)$.
**CQFD**.

## Définition 24 (Domaine et image d'une relation)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$.

• On appelle **domaine** de $\mathcal{R}$ le domaine de son graphe. On le note $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$.
Autrement dit, $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{x \in E \mid \exists y \in F, x\mathcal{R}y\}$.

• On appelle **image** de $\mathcal{R}$ l'image de son graphe. On la note $\mathrm{im}(\mathcal{R})$.
Autrement dit, $\mathrm{im}(\mathcal{R}) = \{y \in F \mid \exists x \in E, x\mathcal{R}y\}$.

## Définition 25 (Relation d'égalité)

Soit $E$ un ensemble. Soit $\Delta_E$ la diagonale de $E^2$.

On appelle **relation d'égalité** sur $E$ la relation $((E;E);\Delta_E)$.
On la note aussi $\underset{E}{=}$, et $=$ quand il n'y a pas d'ambiguité.

## Proposition 52

Soit $E$ un ensemble.

Alors pour tout $x$ et $x'$ dans E, on a $x \underset{E}{=} x' \iff x = x'$.

*Démonstration*

• Si $E = \emptyset$, la proposition $\forall x \in E, \forall x' \in E, \left(x \underset{E}{=} x' \iff x = x'\right)$ est nécessairement vrai.

• Si $E \neq \emptyset$, alors $E^2 \neq \emptyset$ d'après la proposition 35 page 46.
Soit $x$ et $x'$ dans $E$. On a alors les équivalences suivantes :
$x \underset{E}{=} x' \iff x((E;E);\Delta_E)x' \iff (x;x') \in \Delta_E \iff x = x'$.
**CQFD**.

## Définition 26 (Relation d'appartenance et d'inclusion)

Soit $E$ un ensemble. On peut munir $E$ des deux relations suivantes :

$(1)$ La **relation d'appartenance** $\underset{E}{\in}$, définie pour tout $(x;y) \in E^2$ par $x \underset{E}{\in} y \iff x \in y$.
On confondra bien souvent $\underset{E}{\in}$ avec $\in$ quand il n'y a pas d'ambiguité.

$(2)$ La **relation d'inclusion** $\underset{E}{\subseteq}$, définie pour tout $(x;y) \in E^2$ par $x \underset{E}{\subseteq} y \iff x \subseteq y$.
On confondra bien souvent $\underset{E}{\subseteq}$ avec $\subseteq$ quand il n'y a pas d'ambiguité.

## Proposition 53 (Unique relation binaire sur $\emptyset$)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.

Si $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

*Démonstration*

Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$, et $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$.
Ainsi, $\Gamma_{\mathcal{R}}$ et $\Gamma_{\mathcal{S}}$ sont des graphes de $E$ dans $F$.

Supposons que $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.

Donc $\Gamma_{\mathcal{R}} = \emptyset = \Gamma_{\mathcal{S}}$ d'après la prop. 39 p. 50.

Donc $\mathcal{R} = ((E; F); \Gamma_R) = ((E; F); \emptyset) = ((E; F); \Gamma_S) = \mathcal{S}$.

Donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

**CQFD**.

## 3.2 Restriction et prolongement

**Proposition 54**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$. Soit $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

Soient $E' \subseteq E$ et $F' \subseteq F$.

(1) $((E'; F); \Gamma \cap (E' \times F))$ est une relation binaire de $E'$ dans $F$.

(2) $((E; F'); \Gamma \cap (E \times F'))$ est une relation binaire de $E$ dans $F'$.

*Démonstration*

♦ $(1)$ : On a $\Gamma \cap (E' \times F) \subseteq E' \times F$ donc $\Gamma \cap (E' \times F)$ est bien un graphe de $E'$ dans $F$, d'où le résultat.

♦ $(2)$ : On a $\Gamma \cap (E \times F') \subseteq E \times F'$ donc $\Gamma \cap (E \times F')$ est bien un graphe de $E'$ dans $F$, d'où le résultat.

**CQFD**.

**Définition 27 (Restriction et corestriction d'une relation)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$, de graphe $\Gamma$.

Soient $E' \subseteq E$ et $F' \subseteq F$.

$(1)$ On appelle **restriction** de $\mathcal{R}$ à $E'$ la relation de $E'$ dans $F$ définie par $((E'; F); \Gamma \cap (E' \times F))$. On la note $\mathcal{R}_{|E'}$.

$(2)$ On appelle **corestriction** de $\mathcal{R}$ à $F'$ la relation de $E$ dans $F'$ définie par $((E; F'); \Gamma \cap (E \times F'))$. On la note $\mathcal{R}^{|F'}$.

$(3)$ On appelle la **(double) restriction** de $\mathcal{R}$ à $E'$ dans $F'$ la relation $\left(\mathcal{R}_{|E'}\right)^{|F'}$.
On la note $\mathcal{R}_{|E'}^{|F'}$.

$(4)$ Si $E = F$ et $E' = F'$, on dit plutôt que $\mathcal{R}_{|E'}^{|E'}$ est la **relation induite** par $\mathcal{R}$ sur $E'$.

**Définition 28 (Prolongement et coprolongement d'une relation)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation de $E$ dans $F$.

Soient $E' \subseteq E$ et $F' \subseteq F$.

$(1)$ Soit $\mathcal{R}'$ une relation de $E'$ dans $F$.
On dit que $\mathcal{R}$ est un **prolongement** de $\mathcal{R}'$ à $E$ si et seulement si $\mathcal{R}_{|E'} = \mathcal{R}'$.

$(2)$ Soit $\mathcal{R}''$ une relation de $E$ dans $F'$.
On dit que $\mathcal{R}$ est un **coprolongement** de $\mathcal{R}''$ à $F$ si et seulement si $\mathcal{R}^{|F'} = \mathcal{R}''$.

$(3)$ Soit $\mathcal{R}'''$ une relation de $E'$ dans $F'$.
On dit que $\mathcal{R}$ est un **(double) prolongement** de $\mathcal{R}'''$ à $E$ dans $F$
si et seulement si $\mathcal{R}_{|E'}^{|F'} = \mathcal{R}'''$.

### 3.3 Relation plus fine

**Définition 29 (Relation plus fine)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.

On dit que $\mathcal{S}$ est **plus fine** que $\mathcal{R}$ si et seulement si le graphe de $\mathcal{S}$ est inclus dans celui de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on a $x\mathcal{S}y \Rightarrow x\mathcal{R}y$.

On note alors $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R}$.

**Proposition 55 (Propriétés de "être une relation plus fine")**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires de $E$ dans $F$.
On dit que le fait d'être une relation plus fine est :

$(1)$ **réflexive** puisque $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{R}$.
$(2)$ **antisymétrique** puisque si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$, et si $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R}$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.
$(3)$ **transitive** puisque si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$, et si $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{T}$, alors $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{T}$.

*Démonstration*

Ces propriétés découlent immédiatement de celles de l'implication.

♦ $(1)$ :
Cela provient immédiatement du fait qu'on a $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{R}y\Big)$.

♦ $(2)$ :
Si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R}$,
on a donc $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{S}y\Big)$ et $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x\mathcal{R}y \Leftarrow x\mathcal{S}y\Big)$,
c'est-à-dire $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\Big)$, et donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ d'après la remarque 1 page 61.

♦ $(3)$ :
Si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{T}$, alors on a
$\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{S}y\Big)$ et $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x\mathcal{S}y \Rightarrow x\mathcal{T}y\Big)$, et donc par transitivité de

l'implication, on se retrouve avec $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{T}y\Big)$, et donc $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{T}$.
**CQFD**.

**Remarque** :
On verra que si l'on considère "être une relation plus fine" elle-même comme une relation binaire, alors ces propriétés en font une **relation d'ordre**.

**Proposition 56 (Restriction, corestriction et finesse)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$.
Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$.

(1) $\mathcal{R}_{|A} \preccurlyeq \mathcal{R}$.

(2) $\mathcal{R}^{|B} \preccurlyeq \mathcal{R}$.

*Démonstration*

Notons $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

♦ (1)
Le graphe de $\mathcal{R}_{|A}$ est par définition $\Gamma \cap (A \times F)$.
Or, $\Gamma \cap (A \times F) \subseteq \Gamma$ d'après la prop. 22 p. 23.
Donc $\boxed{\mathcal{R}_{|A} \preccurlyeq \mathcal{R}}$.

♦ (2)
Le graphe de $\mathcal{R}^{|B}$ est par définition $\Gamma \cap (E \times F)$.
Or, $\Gamma \cap (E \times F) \subseteq \Gamma$ d'après la prop. 22 p. 23.
Donc $\boxed{\mathcal{R}^{|B} \preccurlyeq \mathcal{R}}$.
**CQFD**.

## 3.4 Composition de relations

**Définition 30 (Composition de deux relations)**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.
Soient $\mathcal{R}$ une relation de $E$ dans $F$ et $\mathcal{R}'$ une relation de $F$ dans $G$.
Soient $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$ et $\Gamma'$ le graphe de $\mathcal{R}'$.

• On appelle **relation composée** de $\mathcal{R}'$ par $\mathcal{R}$ la relation de $E$ dans $G$ définie par $((E;G);\Gamma' \circ \Gamma)$.

• On la note plutôt $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}$.

• Si $E = F = G$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$, alors on notera $\mathcal{R}^2$ plutôt que $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

**Attention !**
Ici aussi, on prendra bien garde à ne pas confondre $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, qui se notent tous les deux $\mathcal{R}^2$.
En cas de doute, il sera précisé de quel ensemble on parle.

**Proposition 57**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.
Soient $\mathcal{R}$ une relation de $E$ dans $F$ et $\mathcal{R}'$ une relation de $F$ dans $G$.

Alors $\forall x \in E, \forall z \in G, x(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R})z \iff \Big(\exists y \in F, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}'z\Big)$.

*Démonstration*

• Supposons que $E = \emptyset$ ou $G = \emptyset$.
Donc l'assertion $\forall x \in E, \forall z \in G, x(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R})z \iff \Big(\exists y \in F, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}'z\Big)$ est forcément vraie.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$. Donc $E \times G \neq \emptyset$ d'après la proposition 35 page 46.
Soient $x \in E$ et $z \in G$. On a alors les équivalences suivantes :
$x(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R})z$
$\iff x((E;G);\Gamma' \circ \Gamma)z$
$\iff (x;z) \in \Gamma' \circ \Gamma$
$\iff \exists y \in F, (x;y) \in \Gamma \text{ et } (y;z) \in \Gamma'$

$\iff \exists y \in F, x((E;F);\Gamma)y$ et $y((F;G);\Gamma')z$
$\iff \exists y \in F, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}'z$.

Ainsi, $\boxed{\forall x \in E, \forall z \in G, x(\mathcal{R}' \circ \mathcal{R})z \iff \left(\exists y \in F, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}'z\right)}$.

**CQFD**.

**Proposition 58 (Associativité de la composition de relations)**

Soient $E$, $F$, $G$ et $H$ quatre ensembles.
Soient $\mathcal{R}$ une relation de $E$ dans $F$, $\mathcal{S}$ une relation de $F$ dans $G$, et $\mathcal{T}$ une relation de $G$ dans $H$.

On a alors $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

On dit que la composition de relations est **associative**.

*Démonstration*

Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$, notons $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$, et notons $\Gamma_{\mathcal{T}}$ le graphe de $\mathcal{T}$.
On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}\\
&= \Big(((G;H);\Gamma_{\mathcal{T}}) \circ \mathcal{S}\Big) \circ \mathcal{R}\\
&= \Big(((G;H);\Gamma_{\mathcal{T}}) \circ ((F;G);\Gamma_{\mathcal{S}})\Big) \circ \mathcal{R}\\
&= ((F;H);\Gamma_{\mathcal{T}} \circ \Gamma_{\mathcal{S}}) \circ \mathcal{R}\\
&= ((F;H);\Gamma_{\mathcal{T}} \circ \Gamma_{\mathcal{S}}) \circ ((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}})\\
&= ((E;H);(\Gamma_{\mathcal{T}} \circ \Gamma_{\mathcal{S}}) \circ \Gamma_{\mathcal{R}})\\
&= ((E;H);\Gamma_{\mathcal{T}} \circ (\Gamma_{\mathcal{S}} \circ \Gamma_{\mathcal{R}}))\\
&= ((G;H);\Gamma_{\mathcal{T}}) \circ ((E;G);\Gamma_{\mathcal{S}} \circ \Gamma_{\mathcal{R}})\\
&= \mathcal{T} \circ ((E;G);\Gamma_{\mathcal{S}} \circ \Gamma_{\mathcal{R}})\\
&= \mathcal{T} \circ \Big(((F;G);\Gamma_{\mathcal{S}}) \circ ((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}})\Big)\\
&= \mathcal{T} \circ \Big(\mathcal{S} \circ ((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}})\Big)\\
&= \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}).
\end{aligned}$$

**CQFD**.

## Proposition 59 (Neutralité de la relation d'égalité)

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

On a alors $(\mathcal{R} \circ \underset{E}{=}) = \mathcal{R} = (\underset{E}{=} \circ \mathcal{R})$.

On dit que $\underset{E}{=}$ est **neutre** pour la composition des relations binaires sur $E$.

*Démonstration*

Notons $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

♦ Commençons par montrer que $(\mathcal{R} \circ \underset{E}{=}) = \mathcal{R}$.

On a les égalités suivantes :

$\mathcal{R} \circ \underset{E}{=}$

$= ((E; E); \Gamma) \circ \underset{E}{=}$

$= ((E; E); \Gamma) \circ ((E; E); \Delta_E)$

$= ((E; E); \Gamma \circ \Delta_E)$

$= ((E; E); \Gamma)$ d'après la proposition 43 page 53.

$= \mathcal{R}$.

Donc $\boxed{(\mathcal{R} \circ \underset{E}{=}) = \mathcal{R}}$.

♦ Montrons à présent que $\mathcal{R} = (\underset{E}{=} \circ \mathcal{R})$.

On a les égalités suivantes :

$\mathcal{R}$

$= ((E; E); \Gamma)$

$= ((E; E); \Delta_E \circ \Gamma)$ d'après la proposition 43 page 53.

$= ((E; E); \Delta_E) \circ ((E; E); \Gamma)$

$= (\underset{E}{=} \circ ((E; E); \Gamma)$

$= (\underset{E}{=} \circ \mathcal{R})$.

Donc $\boxed{\mathcal{R} = (\underset{E}{=} \circ \mathcal{R})}$.

**CQFD**.

## 3.5 Relation transposée

**Définition 31 (Relation transposée)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$, de graphe $\Gamma$.

On appelle **relation transposée** de $\mathcal{R}$ la relation binaire de $F$ dans $E$ définie par $((F;E);^t\Gamma)$. On la note plutôt ${}^t\mathcal{R}$.

**Proposition 60**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$.

Alors pour tout $y \in F$ et tout $x \in E$, on a $y^t\mathcal{R}x \iff x\mathcal{R}y$.

*Démonstration*

• Supposons que $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
De ce fait, l'assertion $\forall y \in F, \forall x \in E, \left(y^t\mathcal{R}x \iff x\mathcal{R}y\right)$ est nécessairement vrai.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
Soient $y \in F$ et $x \in E$. On a alors les équivalences suivantes :
$y^t\mathcal{R}x$
$\iff y((F;E);^t\Gamma)x$
$\iff (y;x) \in {}^t\Gamma$
$\iff (x;y) \in \Gamma$
$\iff x((E;F);\Gamma)y$
$\iff x\mathcal{R}y$.
D'où le résultat.
**CQFD**.

**Exemple** :

• La relation d'égalité est sa propre transposée car elle est symétrique.

• La transposée de $\in$ est $\ni$.

• La transposée de $\subseteq$ est $\supseteq$.

## Proposition 61 (Involution de la relation transposée)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation de $E$ dans $F$.

On a alors ${}^t({}^t\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

On dit que le passage à la relation transposée est une **involution**.

### Démonstration

Notons $\Gamma$ le graphe $\mathcal{R}$. On a les égalités suivantes :

${}^t\left({}^t\mathcal{R}\right)$

$= {}^t\left({}^t((E;F);\Gamma)\right)$

$= {}^t\left((F;E);{}^t\Gamma\right)$

$= \left((E;F);{}^t({}^t\Gamma)\right)$

$= ((E;F);\Gamma)$ par involution du graphe transposé

$= \mathcal{R}$

D'où $\boxed{{}^t({}^t\mathcal{R}) = \mathcal{R}}$.

**CQFD**.

## Proposition 62 (Domaine et image de la transposée)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$.

On a alors :

$(1)$ dom $({}^t\mathcal{R}) =$ im $(\mathcal{R})$

$(2)$ im $({}^t\mathcal{R}) =$ dom $(\mathcal{R})$

### Démonstration

Soit $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

♦ $(1)$ : dom $({}^t\mathcal{R}) =$ dom $({}^t\Gamma) \underset{47 \text{ p. } 57}{=} \text{im}(\Gamma) = \text{im}(\mathcal{R})$.

♦ $(2)$ : im $({}^t\mathcal{R}) =$ im $({}^t\Gamma) \underset{47 \text{ p. } 57}{=} \text{dom}(\Gamma) = \text{dom}(\mathcal{R})$.

**CQFD**.

**Proposition 63 (Transposée d'une composition)**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.

Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$, et $\mathcal{S}$ une relation binaire de $F$ dans $G$.

On a alors ${}^t(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = {}^t\mathcal{R} \circ {}^t\mathcal{S}$.

*Démonstration*

Notons $\Gamma_\mathcal{R}$ le graphe de $\mathcal{R}$, et $\Gamma_\mathcal{S}$ le graphe de $\mathcal{S}$.

On a alors les égalités suivantes :

$${}^t(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$$
$$= {}^t\Big(((F;G);\Gamma_\mathcal{S}) \circ \mathcal{R}\Big)$$
$$= {}^t\Big(((F;G);\Gamma_\mathcal{S}) \circ ((E;F);\Gamma_\mathcal{R})\Big)$$
$$= {}^t\Big((E;G);\Gamma_\mathcal{S} \circ \Gamma_\mathcal{R}\Big)$$
$$= \Big((G;E);\ {}^t(\Gamma_\mathcal{S} \circ \Gamma_\mathcal{R})\Big)$$
$$\underset{48 \text{ p. } 57}{=} \Big((G;E);\ {}^t\Gamma_\mathcal{R} \circ {}^t\Gamma_\mathcal{S}\Big)$$
$$= \Big((F;E);\ {}^t\Gamma_\mathcal{R}\Big) \circ \Big((G;F);\ {}^t\Gamma_\mathcal{S}\Big)$$
$$= {}^t\mathcal{R} \circ \Big((G;F);\ {}^t\Gamma_\mathcal{S} Big)$$
$$= {}^t\mathcal{R} \circ {}^t\mathcal{S}$$

**CQFD**.

## 3.6 Relation complémentaire

**Définition 32 (Relation complémentaire)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$, de graphe $\Gamma$.

On appelle **relation complémentaire** de $\mathcal{R}$ la relation $\big((E;F);\complement_{E\times F}\Gamma\big)$.

On la note $\overline{\mathcal{R}}$ ou encore $\complement\mathcal{R}$.

## Proposition 64

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$.

Alors pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on a $x\overline{\mathcal{R}}y \iff \neg(x\mathcal{R}y)$.

*Démonstration*

Notons $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

• Supposons que $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
De ce fait, l'assertion $\forall x \in E, \forall y \in F, \left(x\overline{\mathcal{R}}y \iff \neg(x\mathcal{R}y)\right)$ est nécessairement vrai.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ ou $F \neq \emptyset$.
Soient $x \in E$ et $y \in F$. On a alors les équivalences :
$x\overline{\mathcal{R}}y \iff (x;y) \in \complement_{E\times F}\Gamma \iff (x;y) \notin \Gamma \iff \neg(x\mathcal{R}y)$.
**CQFD**.

**Exemple** :
• La relation compémentaire de $=$ est $\neq$.
• La relation complémentaire de $\in$ est $\notin$.
• La relation complémentaire de $\subseteq$ est $\not\subseteq$.

## Proposition 65 (Involution de la relation complémentaire)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$.

On a alors $\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$.
On dit que le passage à la relation complémentaire est une **involution**.

*Démonstration*

Notons $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$. On a alors les égalités suivantes :

$\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \overline{\overline{((E;F);\Gamma)}} = \overline{\left((E;F);\complement_{E\times F}\Gamma\right)} = \left((E;F);\complement_{E\times F}\left(\complement_{E\times F}\Gamma\right)\right)$
$= ((E;F);\Gamma)$ par involution du complémentaire
$= \mathcal{R}$.
**CQFD**.

**Proposition 66 (Relations transposée et complémentaire)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$.

On a alors $\overline{{}^t\mathcal{R}} = {}^t(\overline{\mathcal{R}})$.

*Démonstration*

Notons $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$. On a alors les égalités suivantes :

$\overline{{}^t\mathcal{R}} = \overline{{}^t((E;F);\Gamma)} = \overline{((F;E);{}^t\Gamma)} = \big((F;E);\complement_{F\times E}({}^t\Gamma)\big) \underset{49 \text{ p. } 58}{=} \big((F;E);{}^t(\complement_{E\times F}\Gamma)\big)$

$= {}^t\big((E;F);\complement_{E\times F}\Gamma\big) = {}^t\Big(\overline{((E;F);\Gamma)}\Big) = {}^t(\overline{\mathcal{R}})$.

**CQFD**.

## 3.7 Union de relations binaires

**Définition 33 (Union de relations binaires)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.

Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$, et $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$.

On appelle **relation union** de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ la relation de $E$ dans $F$ définie par $\Big((E;F);\Gamma_R \cup \Gamma_S\Big)$. On la note plutôt $\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$.

**Remarque** :

On va retrouver naturellement beaucoup de propriétés de l'union.

**Proposition 67 (Union de relations et disjonction)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.

Alors $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})y \iff (x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y)\Big)$.

*Démonstration*

• Supposons que $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
L'assertion $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})y \iff (x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y)\Big)$ est donc nécessairement vraie.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$, et $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$.
Soient $x \in E$ et $y \in F$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & x(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})y \\ \iff & x\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)y \\ \iff & (x;y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}} \\ \iff & (x;y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \text{ ou } (x;y) \in \Gamma_{\mathcal{S}} \\ \iff & x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y. \end{aligned}$$

**CQFD**.

## Proposition 68 (Propriétés de l'union des relations)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires de $E$ dans $F$.
On a les propriétés suivantes :

(1) L'union est **idempotente** : $\mathcal{R} \Cup \mathcal{R} = \mathcal{R}$.
(2) L'union est **associative** : $(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}) \Cup \mathcal{T} = \mathcal{R} \Cup (\mathcal{S} \Cup \mathcal{T})$.
(3) L'union est **commutative** : $\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} = \mathcal{S} \Cup \mathcal{R}$.

*Démonstration*

Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$, $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$ et $\Gamma_{\mathcal{T}}$ le graphe de $\mathcal{T}$.

♦ (1) :
$\mathcal{R} \Cup \mathcal{R} = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) = \Big(((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{R}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) = \mathcal{R}$
par idempotence de l'union sur les graphes.

♦ (2) :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}) \Cup \mathcal{T} \\ = & \Big(((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}) \Cup \mathcal{S}\Big) \Cup \mathcal{T} \\ = & \Big(((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}) \Cup ((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}})\Big) \Cup \mathcal{T} \\ = & \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cup \mathcal{T} \end{aligned}$$

$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \Big((E;F);(\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}) \cup \Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup (\Gamma_{\mathcal{S}} \cup \Gamma_{\mathcal{T}})\Big)$ par associativité de l'union des graphes
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cup \Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \mathcal{R} \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cup \Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \mathcal{R} \Cup \Big(((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}) \Cup ((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \mathcal{R} \Cup \Big(\mathcal{S} \Cup ((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \mathcal{R} \Cup (\mathcal{S} \Cup \mathcal{T})$

♦ (3) :
$\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \mathcal{S}$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cup \Gamma_{\mathcal{R}}\Big)$ par commutativité de l'union des graphes
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big)$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cup \mathcal{R}$
$= \mathcal{S} \Cup \mathcal{R}$
**CQFD**.

## Proposition 69

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.
On a alors :

(1) $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$.
$\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont plus fines que leur union.

(2) Soient $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{S}'$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.
Si $\mathcal{R}' \preccurlyeq \mathcal{R}$ et $\mathcal{S}' \preccurlyeq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R}' \Cup \mathcal{S}' \preccurlyeq \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$.
On dit que l'union est **compatible** avec le fait "d'être plus fine".

(3) Pour toute relation binaire $\mathcal{T}$ de $E$ dans $F$, si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{T}$, alors $\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{T}$.
On dit que l'union de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est **le minimum** pour $\preccurlyeq$ parmi les relations pour lesquelles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont plus fines toutes les deux.

(4) Si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} = \mathcal{S}$.
On dit que $\mathcal{S}$ est **absorbant** pour l'union avec ses relations plus fines.

(5) $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S} \iff \mathcal{R} \Cup \mathcal{S} = \mathcal{S}$.

*Démonstration*

Toutes ces propriétés vont se déduire immédiatement de la proposition 16 page 16.
Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$ et $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$.

♦ (1) :
On a $\Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc par définition de $\preccurlyeq$, on a $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \preccurlyeq \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$.
Donc par définition de $\Cup$, on a $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \preccurlyeq \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$.
Et donc $\boxed{\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}}$.

De même, on a $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{S} \Cup \mathcal{R} = \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$ par commutativité de $\Cup$.
Donc $\boxed{\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}}$.

♦ (2) :

Soient $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{S}'$ deux relations binaires de $E$ dans $F$ telles que $\mathcal{R}' \preccurlyeq \mathcal{R}$ et $\mathcal{S}' \preccurlyeq \mathcal{S}$.
Notons $\Gamma_{\mathcal{R}'}$ le graphe de $\mathcal{R}'$ et $\Gamma_{\mathcal{S}'}$ le graphe de $\mathcal{S}'$.
On a donc par hypothèse que $\Gamma_{\mathcal{R}'} \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}}$ et $\Gamma_{\mathcal{S}'} \subseteq \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}'} \cup \Gamma_{\mathcal{S}'} \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}'} \cup \Gamma_{\mathcal{S}'}\Big) \preccurlyeq \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R}' \Cup \mathcal{S}' \preccurlyeq \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}}$.

♦ $(3)$ :
Soit $\mathcal{T}$ une relation binaire de $E$ dans $F$ telle que $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{T}$.
Donc d'après $(2)$, on a $\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{T} \Cup \mathcal{T}$.
Or par idempotence de $\Cup$, on a $\mathcal{T} \Cup \mathcal{T} = \mathcal{T}$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{T}}$.

♦ $(4)$ :
Supposons que $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}} = \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \mathcal{S}$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} = \mathcal{S}}$.

♦ $(5)$ :
Le sens $\Rightarrow$ c'est tout simplement $(4)$. Montrons donc $\Leftarrow$.
Supposons que $\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} = \mathcal{S}$. On a donc
$\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \mathcal{R} \Cup \mathcal{S} = \mathcal{S} = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$.
Ainsi, on a $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}} = \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \preccurlyeq \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}}$.
**CQFD**.

## 3.8 Intersection de relations binaires

**Définition 34 (Intersection de relations binaires)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.

Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$, et $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$.

On appelle **relation intersection** de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ la relation de $E$ dans $F$ définie par $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$.

On la note plutôt $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$.

**Remarque** :

On va retrouver naturellement beaucoup de propriétés de l'intersection.

**Proposition 70 (Intersection de relations et conjonction)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.

Alors $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y)\Big)$

*Démonstration*

• Supposons que $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.

L'assertion $\forall x \in E, \forall y \in F, \Big(x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y)\Big)$ est donc nécessairement vraie.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.

Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$, et $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$.

Soient $x \in E$ et $y \in F$. On a alors les équivalences suivantes :

$$x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})y$$
$$\iff x\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)t \iff (x;y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}$$
$$\iff (x;y) \in \Gamma_{\mathcal{R}} \text{ et } (x;y) \in \Gamma_{\mathcal{S}}$$
$$\iff x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y.$$

**CQFD**.

## Proposition 71 (Propriétés de l'intersection des relations)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires de $E$ dans $F$.

On a les propriétés suivantes :

(1) L'intersection est **idempotente** : $\mathcal{R} \Cap \mathcal{R} = \mathcal{R}$.

(2) L'intersection est **associative** : $(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}) \Cap \mathcal{T} = \mathcal{R} \Cap (\mathcal{S} \Cap \mathcal{T})$.

(3) L'intersection est **commutative** : $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} = \mathcal{S} \Cap \mathcal{R}$.

*Démonstration*

Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$, $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$ et $\Gamma_{\mathcal{T}}$ le graphe de $\mathcal{T}$.

♦ (1) :

$\mathcal{R} \Cap \mathcal{R} = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) = \Big(((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{R}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) = \mathcal{R}$

par idempotence de l'intersection sur les graphes.

♦ (2) :

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}) \Cap \mathcal{T} \\
&= \Big(((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}) \Cap \mathcal{S}\Big) \Cap \mathcal{T} \\
&= \Big(((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}) \Cap ((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}})\Big) \Cap \mathcal{T} \\
&= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cap \mathcal{T} \\
&= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big) \\
&= \Big((E;F);(\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}) \cap \Gamma_{\mathcal{T}}\Big) \\
&= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap (\Gamma_{\mathcal{S}} \cap \Gamma_{\mathcal{T}})\Big) \text{ par associativité de l'intersection des graphes} \\
&= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cap \Gamma_{\mathcal{T}}\Big) \\
&= \mathcal{R} \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cap \Gamma_{\mathcal{T}}\Big) \\
&= \mathcal{R} \Cap \Big(((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}) \Cap ((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big) \\
&= \mathcal{R} \Cap \Big(\mathcal{S} \Cap ((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big) \\
&= \mathcal{R} \Cap (\mathcal{S} \Cap \mathcal{T})
\end{aligned}$$

♦ (3) :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \\
&= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \mathcal{S}
\end{aligned}$$

$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cap \Gamma_{\mathcal{R}}\Big)$ par commutativité de l'union des graphes
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big)$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cap \mathcal{R}$
$= \mathcal{S} \Cap \mathcal{R}$
**CQFD**.

## Proposition 72

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.
On a alors :

(1) $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{S}$.
Leur intersection est plus fine que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

(2) Soient $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{S}'$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.
Si $\mathcal{R}' \preccurlyeq \mathcal{R}$ et $\mathcal{S}' \preccurlyeq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R}' \Cap \mathcal{S}' \preccurlyeq \mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$.
On dit que l'intersection est **compatible** avec le fait "d'être plus fine".

(3) Pour toute relation binaire $\mathcal{T}$ de $E$ dans $F$, si $\mathcal{T} \preccurlyeq \mathcal{R}$ et $\mathcal{T} \preccurlyeq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{T} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$.
On dit que l'intersection de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est **le maximum** pour $\preccurlyeq$ parmi les relations plus fines que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

(4) Si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} = \mathcal{R}$.
On dit que $\mathcal{S}$ est **neutre** pour l'intersection ses relations plus fines.

(5) $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S} \iff \mathcal{R} \Cap \mathcal{S} = \mathcal{R}$.

*Démonstration*

Toutes ces propriétés vont se déduire immédiatement de la proposition 22 page 23.
Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$ et $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$.

♦ (1) :
On a $\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}}$.
Donc par définition de $\preccurlyeq$, on a $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \preccurlyeq \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big)$.

Donc par définition de $\Cap$, on a $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \preccurlyeq \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big)$.
Et donc $\boxed{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R}}$.

♦ $(2)$ :
Soient $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{S}'$ deux relations binaires de $E$ dans $F$ telles que $\mathcal{R}' \preccurlyeq \mathcal{R}$ et $\mathcal{S}' \preccurlyeq \mathcal{S}$.
Notons $\Gamma_{\mathcal{R}'}$ le graphe de $\mathcal{R}'$ et $\Gamma_{\mathcal{S}'}$ le graphe de $\mathcal{S}'$.
On a donc par hypothèse que $\Gamma_{\mathcal{R}'} \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}}$ et $\Gamma_{\mathcal{S}'} \subseteq \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}'} \cap \Gamma_{\mathcal{S}'} \subseteq \Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}'} \cap \Gamma_{\mathcal{S}'}\Big) \preccurlyeq \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R}' \Cap \mathcal{S}' \preccurlyeq \mathcal{R} \Cap \mathcal{S}}$.

♦ $(3)$ :
Soit $\mathcal{T}$ une relation binaire de $E$ dans $F$ telle que $\mathcal{T} \preccurlyeq \mathcal{R}$ et $\mathcal{T} \preccurlyeq \mathcal{S}$.
Donc d'après $(2)$, on a $\mathcal{T} \Cap \mathcal{T} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$.
Or par idempotence de $\Cap$, on a $\mathcal{T} \Cap \mathcal{T} = \mathcal{T}$.
Donc $\boxed{\mathcal{T} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cap \mathcal{S}}$.

♦ $(4)$ :
Supposons que $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}} = \Gamma_{\mathcal{R}}$.
Donc $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) = \mathcal{R}$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} = \mathcal{R}}$.

♦ $(5)$ :
Le sens $\Rightarrow$ c'est tout simplement $(4)$. Montrons donc $\Leftarrow$.
Supposons que $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} = \mathcal{R}$. On a donc
$\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \mathcal{R} \Cap \mathcal{S} = \mathcal{R} = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big)$.
Ainsi, on a $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) = \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big)$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}} = \Gamma_{\mathcal{R}}$.
Donc $\Gamma_{\mathcal{R}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{S}}$.
Donc $\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \preccurlyeq \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}}$.
**CQFD**.

## Définition 35 (Relations disjointes)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.

On dit que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont **(relationnellement) disjointes** si et seulement si leurs graphes sont disjoints.

## Proposition 73 (Lien entre union et intersection de relations)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires de $E$ dans $F$.

On a alors :

$(1)$ $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$

$(2)$ $\mathcal{R} \Cup (\mathcal{S} \Cap \mathcal{T}) = (\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}) \Cap (\mathcal{R} \Cup \mathcal{T})$

On dit que $\Cup$ est **distributive** sur $\Cap$.

$(3)$ $\mathcal{R} \Cap (\mathcal{S} \Cup \mathcal{T}) = (\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}) \Cup (\mathcal{R} \Cap \mathcal{T})$

On dit que $\Cap$ est **distributive** sur $\Cup$.

*Démonstration*

Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$, $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$ et $\Gamma_{\mathcal{T}}$ le graphe de $\mathcal{T}$.

♦ $(1)$ :

On a $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R}$ d'après la prop. 72 p. 81.

On a aussi $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$ d'après la prop. 68 p. 75.

Donc par transitivité de $\preccurlyeq$, on a $\boxed{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \preccurlyeq \mathcal{R} \Cup \mathcal{S}}$.

♦ $(2)$ :

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R} \Cup (\mathcal{S} \Cap \mathcal{T}) \\
&= \mathcal{R} \Cup \Big[\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big)\Big] \\
&= \mathcal{R} \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cap \Gamma_{\mathcal{T}}\Big) \\
&= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cap \Gamma_{\mathcal{T}}\Big) \\
&= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup (\Gamma_{\mathcal{S}} \cap \Gamma_{\mathcal{T}})\Big)
\end{aligned}$$

$= \Big((E;F);(\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}) \cap (\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{T}})\Big)$ par distributivité de $\cup$ sur $\cap$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \Big[\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)\Big] \Cap \Big[\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big]$
$= \Big[\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}\Big] \Cap \Big[\mathcal{R} \Cup \mathcal{T}\Big].$

Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cup (\mathcal{S} \Cap \mathcal{T}) = (\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}) \Cap (\mathcal{R} \Cup \mathcal{T})}$.

♦ (3) :
On a les égalités suivantes :
$\mathcal{R} \Cap (\mathcal{S} \Cup \mathcal{T})$
$= \mathcal{R} \Cap \Big[\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big)\Big]$
$= \mathcal{R} \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cup \Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}} \cup \Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap (\Gamma_{\mathcal{S}} \cup \Gamma_{\mathcal{T}})\Big)$
$= \Big((E;F);(\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}) \cup (\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{T}})\Big)$ par distributivité de $\cap$ sur $\cup$
$= \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{T}}\Big)$
$= \Big[\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)\Big] \Cup \Big[\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{T}}\Big]$
$= \Big[\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}\Big] \Cup \Big[\mathcal{R} \Cap \mathcal{T}\Big].$

Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cap (\mathcal{S} \Cup \mathcal{T}) = (\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}) \Cup (\mathcal{R} \Cap \mathcal{T})}$.
**CQFD**.

## Proposition 74 (Lois de De Morgan - Relations binaires)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.

(1) $\overline{\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}} = \overline{\mathcal{R}} \Cap \overline{\mathcal{S}}$.

(2) $\overline{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}} = \overline{\mathcal{R}} \Cup \overline{\mathcal{S}}$.

*Démonstration*

Nous allons ici utiliser les lois de De Morgan ensemblistes par rapport au complémentaire, c'est-à-dire la proposition 30 page 37.
Notons $\Gamma_{\mathcal{R}}$ le graphe de $\mathcal{R}$ et $\Gamma_{\mathcal{S}}$ le graphe de $\mathcal{S}$.

♦ (1) :

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}} \\
&= \overline{\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)} \\
&= \overline{\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)} \\
&= \Big((E;F);\complement_{E\times F}\left[\Gamma_{\mathcal{R}} \cup \Gamma_{\mathcal{S}}\right]\Big) \\
&= \Big((E;F);\left[\complement_{E\times F}\Gamma_{\mathcal{R}}\right] \cap \left[\complement_{E\times F}\Gamma_{\mathcal{S}}\right]\Big) \\
&= \Big((E;F);\complement_{E\times F}\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\complement_{E\times F}\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \\
&= \overline{\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big)} \Cap \overline{\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)} \\
&= \overline{\mathcal{R}} \Cap \overline{\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\overline{\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}} = \overline{\mathcal{R}} \Cap \overline{\mathcal{S}}}$.

♦ (2) :

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}} \\
&= \overline{\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cap \Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)} \\
&= \overline{\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\Big)} \\
&= \Big((E;F);\complement_{E\times F}\left[\Gamma_{\mathcal{R}} \cap \Gamma_{\mathcal{S}}\right]\Big) \\
&= \Big((E;F);\left[\complement_{E\times F}\Gamma_{\mathcal{R}}\right] \cup \left[\complement_{E\times F}\Gamma_{\mathcal{S}}\right]\Big) \\
&= \Big((E;F);\complement_{E\times F}\Gamma_{\mathcal{R}}\Big) \Cup \Big((E;F);\complement_{E\times F}\Gamma_{\mathcal{S}}\Big) \\
&= \overline{\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{R}}\Big)} \Cup \overline{\Big((E;F);\Gamma_{\mathcal{S}}\Big)} \\
&= \overline{\mathcal{R}} \Cup \overline{\mathcal{S}}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\overline{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}} = \overline{\mathcal{R}} \Cup \overline{\mathcal{S}}}$.

**CQFD**.

# 4 Relations particulières

## 4.1 Relations réflexives

**Définition 36 (Relation réflexive)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur $E$.

On dit que $\mathcal{R}$ est **réflexive** si et seulement si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.

**Exemple** :
• La relation d'égalité est réflexive, d'après la prop. 1 p. 3.
• La relation d'inclusion est réflexive, d'après la prop. 3 p. 5.
• L'unique relation $\mathcal{R}$ sur $\emptyset$ (unique d'après la prop. 53 p. 62) est réflexive puisque l'assertion $\forall x \in \emptyset, x\mathcal{R}x$ est nécessairement vraie.

**Proposition 75 (Conditions de réflexivité sur les relations)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

$(1)$ $\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est réflexive.

$(2)$ Notons $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$. Soit $\Delta_E$ la diagonale de $E^2$.
$\mathcal{R}$ est réflexive si et seulement si $\Delta_E \subseteq \Gamma$.

*Démonstration*

♦ $(1)$ : C'est immédiat par définition de la transposée d'une relation :

$$\begin{aligned} & \mathcal{R} \text{ est réflexive} \\ \iff & \forall x \in E, x\mathcal{R}x \\ \iff & \forall x \in E, x\,{}^t\mathcal{R}x \\ \iff & {}^t\mathcal{R} \text{ est réflexive} \end{aligned}$$

♦ $(2)$ : On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathcal{R} \text{ est réflexive} \\ \iff & \forall x \in E, x\mathcal{R}x \\ \iff & \forall x \in E, (x; x) \in \Gamma \end{aligned}$$

$\iff \forall a \in \Delta_E, a \in \Gamma$

$\iff \Delta_E \subseteq \Gamma$.

**CQFD**.

## Proposition 76 (Réflexivité et opérations sur les relations)

Soit $E$ un ensemble. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires sur $E$.

(1) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est réflexive.

(2) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors $\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$ est réflexive.

(3) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$ est réflexive.

*Démonstration*

Supposons pour toute la suite que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives.

• Si $E = \emptyset$, alors les assertions suivantes sont nécessairement vraies :

— $\forall x \in E, x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})x$

— $\forall x \in E, x(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})x$

— $\forall x \in E, x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})x$

Donc $(1)$ $\boxed{\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ est réflexive.}}$

Et $(2)$ $\boxed{\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} \text{ est réflexive.}}$

Et $(3)$ $\boxed{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \text{ est réflexive.}}$

• Supposons à présent que $E \neq \emptyset$.

♦ $(1)$ :

Soit $x \in E$.

On sait que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, donc $x\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{S}x$.

Donc il existe $y \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}x$.

Donc $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})x$.

Ainsi, $\forall x \in E, x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})x$.

Donc $\boxed{\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ est réflexive.}}$

♦ $(2)$ :

Soit $x \in E$.
On sait que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, donc $x\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{S}x$.
En particulier, on sait que $x\mathcal{R}x$ ou $x\mathcal{S}x$.
Donc $x(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})x$ d'après la prop. 67 p. 74.
Ainsi, $\forall x \in E, x(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})x$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} \text{ est réflexive}}$.

♦ (3) :
Soit $x \in E$.
On sait que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, donc $x\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{S}x$.
Donc $x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})x$ d'après la prop. 70 p. 79.
Ainsi, $\forall x \in E, x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})x$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \text{ est réflexive}}$.
**CQFD**.

## 4.2 Relations antiréflexives

**Définition 37 (Relation antiréflexives)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

On dit que $\mathcal{R}$ est **antiréflexive** si et seulement si $\forall x, \neg(x\mathcal{R}x)$.

**Exemple** :
• Nous imposerons plus tard, via un axiome (dit **axiome de fondement**), que la relation d'appartenance est antiréflexive.
• L'unique relation $\mathcal{R}$ sur $\emptyset$ (unique d'après la prop. 53 p. 62) est antiréflexive puisque l'assertion $\forall x \in \emptyset, \neg(x\mathcal{R}x)$ est nécessairement vraie.

**Proposition 77 (Conditions d'antiréflexivité)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

(1) $\mathcal{R}$ est antiréflexive si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est antiréflexive.

(2) Soit $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$. Soit $\Delta_E$ la diagonale de $E^2$.
$\mathcal{R}$ est antiréflexive si et seulement si $\Gamma \cap \Delta_E = \emptyset$.

*Démonstration*

♦ (1) : On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R} \text{ est antiréflexive} \\
\iff & \forall x \in E, \neg(x\mathcal{R}x) \\
\iff & \forall x \in E, \neg(x\,{}^t\mathcal{R}x) \\
\iff & {}^t\mathcal{R} \text{ est antiréflexive}
\end{aligned}$$

♦ (2) : On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R} \text{ est antiréflexive} \\
\iff & \forall x \in E, \neg(x\mathcal{R}x) \\
\iff & \forall x \in E, \neg((x;x) \in \Gamma) \\
\iff & \forall x \in E, (x;x) \notin \Gamma \\
\iff & \forall c \in \Delta_E, c \notin \Gamma \\
\iff & \forall c, \Big(c \in \Delta_E \Rightarrow c \notin \Gamma\Big) \\
\iff & \forall c, \Big(c \notin \Delta_E \text{ ou } c \notin \Gamma\Big) \\
\iff & \forall c, \neg\Big(c \in \Delta_E \text{ et } c \in \Gamma\Big) \\
\iff & \forall c, \neg(c \in \Delta_E \cap \Gamma) \\
\iff & \forall c, c \notin \Delta_E \cap \Gamma \\
\iff & \Delta_E \cap \Gamma = \emptyset
\end{aligned}$$

**CQFD**.

## Proposition 78 (Réflexivité et antiréflexivité)

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

(1) $\mathcal{R}$ est réflexive et antiréflexive si et seulement si $E = \emptyset$.
Ainsi, à moins que l'ensemble ne soit vide, il est impossible d'avoir une relation à la fois réflexive et antiréflexive.

(2) S'il existe au moins deux éléments distincts dans $E$, alors il existe sur $E$ une relation binaire qui n'est ni réflexive, ni antiréflexive. Ainsi, la réflexivité et l'antiréflexivité ne sont pas la négation l'une de l'autre.

*Démonstration*

♦ (1) :

Raisonnons par double implications :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive et antiréflexive.
Alors on a $\forall x \in E, \Big(x\mathcal{R}x \text{ et } \neg(x\mathcal{R}x)\Big)$.
En particulier, on a $E = \{x \in E \mid x\mathcal{R}x \text{ et } \neg(x\mathcal{R}x)\}$.
Or, pour tout $x \in E$, l'assertion $x\mathcal{R}x$ et $\neg(x\mathcal{R}x)$ est fausse d'après le principe de non-contradiction.
Donc pour tout $x \in E$, on a $\Big(x\mathcal{R}x \text{ et } \neg(x\mathcal{R}x)\Big) \iff x \neq x$.
On a donc $\{x \in E \mid x\mathcal{R}x \text{ et } \neg(x\mathcal{R}x)\} \underset{5 \text{ p. } 6}{=} \{x \in E \mid x \neq x\} \underset{5 \text{ p. } 8}{=} \emptyset$.
Et donc par transitivité de l'égalité, on a $E = \emptyset$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $E = \emptyset$.
Alors l'assertion $\forall x \in E, \Big(x\mathcal{R}x \text{ et } \neg(x\mathcal{R}x)\Big)$ est nécessairement vraie.
Donc $\mathcal{R}$ est réflexive et antiréflexive.

♦ (2) :

Supposons que $E$ possède au moins deux éléments distincts, que l'on va noter $y$ et $z$.
Soit $\Gamma = \{(y; y)\}$. On a $\Gamma \subseteq E^2$ donc $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $E$.
Considérons $\mathcal{R} = ((E; E); \Gamma)$.
Comme $(y; y) \in \Gamma$, on a $y\mathcal{R}y$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas antiréflexive.
Comme $(z; z) \notin \Gamma$, on a $\neg\,(z\mathcal{R}z)$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive.
**CQFD**.

## 4.3 Relations symétriques

**Définition 38 (Relations symétriques)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

On dit que $\mathcal{R}$ est **symétrique** si et seulement si $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x\Big)$

**Exemple** :

• La relation d'égalité est symétrique d'après la prop. 1 p. 3.

• L'unique relation $\mathcal{R}$ sur $\emptyset$ (unique d'après la prop. 53 p. 62) est symétrique puisque l'assertion $\forall x \in \emptyset, \forall y \in \emptyset, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x\Big)$ est nécessairement vraie.

## Proposition 79 (Relation symétrique et transposée)

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

$\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si ${}^t\mathcal{R} = \mathcal{R}$.

*Démonstration*

• Supposons ici que $E = \emptyset$.
Alors comme $\mathcal{R}$ et ${}^t\mathcal{R}$ sont deux relations binaires sur $\emptyset$, elles sont égales d'après la prop. 53 p. 62.
De plus, on a vu dans les exemples de relations symétriques que cette unique relation est bien symétrique.

• Supposons à présent que $E \neq \emptyset$.

Raisonnons par double implicatons.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathcal{R}$ est symétrique.
Soient $x$ et $y$ dans $E$. On a les équivalences suivantes :
$x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x \iff x\,{}^t\mathcal{R}y$.
Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \iff x\,{}^t\mathcal{R}y\Big)$.
D'après la remarque 1 page 61, on a bien $\mathcal{R} = {}^t\mathcal{R}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathcal{R} = {}^t\mathcal{R}$.
Soient $x$ et $y$ dans $E$. On les implications suivantes :
$x\mathcal{R}y \Rightarrow x\,{}^t\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x\Big)$.
$\mathcal{R}$ est donc symétrique.
**CQFD**.

## Proposition 80 (Symétrie et opérations sur les relations)

Soit $E$ un ensemble. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires sur $E$.

(1) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques, alors $\mathcal{R} \Cup \mathcal{S}$ est symétrique.

(2) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques, alors $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$ est symétrique.

*Démonstration*

• Si $E = \emptyset$, alors les assertions suivantes sont nécessairement vraie :

— $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})y \Rightarrow y(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})x\Big)$

— $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})y \Rightarrow y(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})x\Big)$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} \text{ et } \mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \text{ sont symétriques}}$.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

♦ (1) :

Supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques.

Soient $x \in E$ et $y \in E$.

Si $x(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})y$, alors $x\mathcal{R}y$ ou $x\mathcal{S}y$.

Or, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques. Donc $y\mathcal{R}x$ ou $y\mathcal{S}x$.

Donc $y(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})x$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})y \Rightarrow y(\mathcal{R} \Cup \mathcal{S})x\Big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cup \mathcal{S} \text{ est symétrique}}$.

♦ (2) :

Supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques.

Soient $x \in E$ et $y \in E$.

Si $x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})y$, alors $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{S}y$.

Or, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques. Donc $y\mathcal{R}x$ et $y\mathcal{S}x$.

Donc $y(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})x$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})y \Rightarrow y(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})x\Big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \text{ est symétrique}}$.

**CQFD**.

## 4.4 Relations antisymétriques

**Définition 39 (Relations antisymétriques)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

On dit que $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si et seulement si
$\forall x \in E, \forall y \in E, \Big( (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y \Big)$.

**Exemple** :

• La relation d'égalité est évidemment antisymétrique.

• La relation d'inclusion est antisymétrique d'après la prop. 3 p. 5.

• Nous imposerons plus tard via un axiome (**l'axiome de fondement**) que la relation d'appartenance est antisymétrique.

• L'unique relation $\mathcal{R}$ sur $\emptyset$ (unique d'après la prop. 53 p. 62) est antisymétrique puisque l'assertion $\forall x \in \emptyset, \forall y \in \emptyset, \Big( (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y \Big)$ est nécessairement vraie.

**Proposition 81 (Conditions d'antisymétrie)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.
Soit $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

$(1)$ $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est antisymétrique.

$(2)$ Soit $\Delta_E$ la diagonale de $E^2$.
$\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si $\Big( \Gamma \cap {}^t\Gamma \Big) \subseteq \Delta_E$.

$(3)$ Soit $\underset{E}{=}$ la relation d'égalité sur $E$.
$\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si $\Big( \mathcal{R} \Cap {}^t\mathcal{R} \Big) \preccurlyeq \underset{E}{=}$.

$(4)$ $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big( (x \neq y \text{ et } x\mathcal{R}y) \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x) \Big)$.

*Démonstration*

♦ $(1)$ :

• Supposons que $E = \emptyset$.
Dans ce cas là, il n'y a qu'une seule relation binaire sur $E$ d'après la prop. 53 p. 62 donc $\mathcal{R} = {}^t\mathcal{R}$,

d'où l'équivalence.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.
Soient $x$ et $y$ dans E tels que $x\,{}^t\mathcal{R}y$ et $y\,{}^t\mathcal{R}x$.
Donc par définition de ${}^t\mathcal{R}$, on a $y\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y$.
Or, $\mathcal{R}$ est antisymétrique par hypothèse.
Donc $x = y$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big((x\,{}^t\mathcal{R}y \text{ et } y\,{}^t\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y\Big)$.
Donc ${}^t\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Ainsi $\boxed{\mathcal{R} \text{ est antisymétrique} \Rightarrow {}^t\mathcal{R} \text{ est antisymétrique}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que ${}^t\mathcal{R}$ est antisymétrique.
Donc d'après $\boxed{\Rightarrow}$, on sait que ${}^t({}^t\mathcal{R})$ est antisymétrique.
Or, ${}^t({}^t\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ par involution de la transposition.
Donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Ainsi, $\boxed{{}^t\mathcal{R} \text{ est antisymétrique} \Rightarrow \mathcal{R} \text{ est antisymétrique}}$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est antisymétrique si et seulement si } {}^t\mathcal{R} \text{ est antisymétrique}}$.

♦ $(2)$ : On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R} \text{ est antisymétrique} \\
\iff\ & \forall x \in E, \forall y \in E, \Big([x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x] \Rightarrow x = y\Big) \\
\iff\ & \forall x \in E, \forall y \in E, \Big([x\mathcal{R}y \text{ et } x\,{}^t\mathcal{R}y] \Rightarrow x = y\Big) \\
\iff\ & \forall x \in E, \forall y \in E, \Big([(x;y) \in \Gamma \text{ et } (x;y) \in {}^t\Gamma] \Rightarrow x = y\Big) \\
\iff\ & \forall x \in E, \forall y \in E, \Big((x;y) \in \Gamma \cap {}^t\Gamma \Rightarrow x = y\Big) \\
\iff\ & \forall x \in E, \forall y \in E, \Big((x;y) \in \Gamma \cap {}^t\Gamma \Rightarrow (x;y) \in \Delta_E\Big) \\
\iff\ & \forall u \in E^2, \Big(u \in \Gamma \cap {}^t\Gamma \Rightarrow u \in \Delta_E\Big) \\
\iff\ & \Big(\Gamma \cap {}^t\Gamma\Big) \subseteq \Delta_E
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est antisymétrique si et seulement si } \Big(\Gamma \cap {}^t\Gamma\Big) \subseteq \Delta_E}$.

♦ $(3)$ :

Commençons par rappeler que $\Gamma \cap {}^t\Gamma$ est le graphe de $\mathcal{R} \Cap {}^t\mathcal{R}$, et que $\Delta_E$ est le graphe de $\underset{E}{=}$. Ainsi, par définition, on a $\mathcal{R} \Cap {}^t\mathcal{R} = \Big((E;E); \Gamma \cap {}^t\Gamma\Big)$ et $\underset{E}{=} = \Big((E;E); \Delta_E\Big)$.

De ce fait, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R} \text{ est antisymétrique} \\
\underset{(2)}{\iff}\ & \Big(\Gamma \cap {}^t\Gamma\Big) \subseteq \Delta_E \\
\iff\ & \Big((E;E); \Gamma \cap {}^t\Gamma\Big) \preccurlyeq \Big((E;E); \Delta_E\Big) \\
\iff\ & \Big(\mathcal{R} \Cap {}^t\mathcal{R}\Big) \preccurlyeq \underset{E}{=}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a $\boxed{\mathcal{R} \text{ est antisymétrique si et seulement si } \Big(\mathcal{R} \Cap {}^t\mathcal{R}\Big) \preccurlyeq \underset{E}{=}}$.

♦ (4) :
On utilise la règle de logique qui dit que si $P$, $Q$ et $R$ sont des assertions, alors on a l'équivalence $\Big((P \text{ et } Q) \Rightarrow R\Big) \iff \Big((\neg R \text{ et } P) \Rightarrow \neg Q\Big)$ $(\star)$.

Ainsi, en posant $P$ l'assertion « $x\mathcal{R}y$ », en posant $Q$ l'assertion « $y\mathcal{R}x$ » et en posant $R$ l'assertion « $x = y$ », on va avoir les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R} \text{ est antisymétrique} \\
\iff\ & \forall x \in E, \forall y \in E, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y\Big) \\
\underset{(\star)}{\iff}\ & \Big((x \neq y \text{ et } x\mathcal{R}y) \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x)\Big).
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est antisymétrique si et seulement si } \forall x \in E, \forall y \in E, \Big((x \neq y \text{ et } x\mathcal{R}y) \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x)\Big)}$.
**CQFD**.

## Proposition 82 (Antisymétrie et intersection)

Soit $E$ un ensemble.
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires sur $E$.

(1) Si $\mathcal{R}$ est antisymétrique ou si $\mathcal{S}$ est antisymétrique, alors $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$ est antisymétrique.

(2) Si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ et si $\mathcal{S}$ est antisymétrique, alors $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

*Démonstration*

♦ (1) :

• Supposons que $E = \emptyset$.

Dans ce cas là, il n'y a qu'une seule relation binaire sur $E$ d'après la prop. 53 p. 62.
En particulier, on a $\mathcal{R} = \mathcal{R} \Cap \mathcal{S} = \mathcal{S}$.
D'où l'implication.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

Supposons que $\mathcal{R}$ est antisymétrique ou que $\mathcal{S}$ est antisymétrique.

Soient $x$ et $y$ dans E tel que $x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})y$ et $y(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})x$.
On a donc $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{R}x$ et $y\mathcal{S}x$.
Donc par hypothèse, comme on au moins une des deux qui est antisymétrique, on a $x = y$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big([x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})y \text{ et } y(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})x] \Rightarrow x = y\Big)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \text{ est antisymétrique}}$.

♦ (2) :

• Supposons que $E = \emptyset$.

Dans ce cas là, on sait qu'il n'y a qu'une seule relation binaire sur $E$ d'après la prop. 53 p. 62.
Ainsi, on a donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ et donc $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ par réflexivité de $\preccurlyeq$.
De plus, cette unique relation est bien antisymétrique comme on a pu le voir dans les exemples de relations antisymétriques.
D'où l'implication.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

Supposons que $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}$ est antisymétrique.
Soient $x$ et $y$ dans E tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.
Or, on sait que $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ par hypothèse.
Donc on a $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$.
Or, on sait que $\mathcal{S}$ est antisymétrique.
Donc $x = y$.

On en déduit donc que $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y\Big)$.
Donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Donc $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S} \text{ et si } \mathcal{S} \text{ est antisymétrique, alors } \mathcal{R} \text{ est antisymétrique}}$.

**CQFD**.

## Proposition 83 (Symétrie et antisymétrie)

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

Si $\mathcal{R}$ est symétrique et antisymétrique, alors $\mathcal{R} \preccurlyeq \underset{E}{=}$.

*Démonstration*

- Supposons que $E = \emptyset$.

  Premièrement dans ce cas là, il n'y a qu'une seule relation binaire sur $E$ d'après la prop. 53 p. 62 donc $\mathcal{R}$ est bien $\underset{E}{=}$.
  En particulier,par réflexivité de $\preccurlyeq$, on a $\mathcal{R} \preccurlyeq \underset{E}{=}$.
  De plus, cette unique relation est bien symétrique et antisymétrique d'après les exemples de ces deux définitions.
  D'où l'implication.

- Supposons que $E \neq \emptyset$.

  Supposons que $\mathcal{R}$ est symétrique et antisymétrique.
  Soient $x$ et $y$ dans E tels que $x\mathcal{R}y$.
  Comme $\mathcal{R}$ est symétrique, on en déduit que $y\mathcal{R}x$.
  Comme $\mathcal{R}$ est antisymétrique, on en déduit que $x = y$, et donc $x \underset{E}{=} y$.

  Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow x \underset{E}{=} y\Big)$.
  Donc par définition de $\preccurlyeq$, on a $\mathcal{R} \preccurlyeq \underset{E}{=}$.

  Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est symétrique et antisymétrique} \Rightarrow \Big(\mathcal{R} \preccurlyeq \underset{E}{=}\Big)}$.

**CQFD**.

## 4.5 Relations asymétriques

**Définition 40 (Relations asymétriques)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

On dit que $\mathcal{R}$ est **asymétrique** si et seulement si $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg\,(y\mathcal{R}x)\Big)$.

**Exemple** :
• Nous imposerons plus tard via un axiome (**l'axiome de fondation**) que la relation d'appartenance est asymétrique.
• L'unique relation $\mathcal{R}$ sur $\emptyset$ (unique d'après la prop. 53 p. 62) est asymétrique puisque l'assertion $\forall x \in \emptyset, \forall y \in \emptyset, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg\,(y\mathcal{R}x)\Big)$ est nécessairement vraie.

**Proposition 84 (Conditions d'asymétrie)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.
Soit $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

(1) $\mathcal{R}$ est asymétrique si et seulement si $\mathcal{R}$ est antisymétrique et antiréflexive.

(2) $\mathcal{R}$ est asymétrique si et seulement si $\mathcal{R}$ et ${}^t\mathcal{R}$ sont (relationnellement) disjointe, c'est-à-dire si et seulement si $\Gamma \cap {}^t\Gamma = \emptyset$.

(3) $\mathcal{R}$ est asymétrique si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est asymétrique.

*Démonstration*

♦ (1) :

• Supposons que $E = \emptyset$.

Nous avons vu dans ce cas là qu'il y avait une unique relation binaire sur $E$ d'après la prop. 53 p. 62.
Or, nous avons vu que cette unique relation était antiréflexive, antisymétrique et asymétrique dans les exemples de ces qualificatifs.
D'où l'équivalence.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

Raisonnons par doubles implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est asymétrique.

Montrons pour commencer que $\mathcal{R}$ est antiréflexive.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}x$.

Alors par asymétrie de $\mathcal{R}$, on aurait $\neg(x\mathcal{R}x)$.

Ainsi, on aurait à la fois $x\mathcal{R}x$ et $\neg(x\mathcal{R}x)$.

C'est absurde d'après le principe de non contradiction.

On a donc $\neg(\exists x \in E, x\mathcal{R}x)$.

On a donc $\forall x \in E, \neg(x\mathcal{R}x)$.

Donc $\mathcal{R}$ est antiréflexive.

Montrons à présent que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Soient $x$ et $y$ dans E tel que $x \neq y$ et $x\mathcal{R}y$.

En particulier, on a $x\mathcal{R}y$.

Donc par asymétrie de $\mathcal{R}$, on a $\neg(y\mathcal{R}x)$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big((x \neq y \text{ et } x\mathcal{R}y) \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x)\Big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique d'après la prop. 81 p. 93.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est asymétrique} \Rightarrow \mathcal{R} \text{ est antiréflexive et antisymétrique}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est antiréflexive et antisymétrique.

Soient $x$ et $y$ dans E tel que $x\mathcal{R}y$.

Ainsi, on a $x = y \Rightarrow x\mathcal{R}x$.

Donc par contraposition, on a $\neg(x\mathcal{R}x) \Rightarrow x \neq y$.

Or, l'antiréflexivité de $\mathcal{R}$ impose que $\neg(x\mathcal{R}x)$.

Donc par modus ponens, on a $x \neq y$.

On a donc $x \neq y$ et $x\mathcal{R}y$.

Donc comme $\mathcal{R}$ est antisymétrique, on a $\neg(y\mathcal{R}x)$ d'après la prop. 81 p. 93.

On vient donc prouver que $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x)\Big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est asymétrique.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est antiréflexive et antisymétrique} \Rightarrow \mathcal{R} \text{ est asymétrique}}$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est asymétrique} \iff \mathcal{R} \text{ est antiréflexive et antisymétrique}}$.

♦ (2) :
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \quad \mathcal{R} \text{ est asymétrique} \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x)\Big) \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(\neg(x\mathcal{R}y) \text{ ou } \neg(y\mathcal{R}x)\Big) \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \neg\Big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\Big) \text{ d'après les lois de De Morgan} \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \neg\Big(x\mathcal{R}y \text{ et } x\,{}^t\mathcal{R}y\Big) \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \neg\Big((x;y) \in \Gamma \text{ et } (x;y) \in {}^t\Gamma\Big) \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \neg\Big((x;y) \in \Gamma \cap {}^t\Gamma\Big) \\
\iff & \quad \forall u \in E^2, \neg\Big(u \in \Gamma \cap {}^t\Gamma\Big) \\
\iff & \quad \Gamma \cap {}^t\Gamma = \emptyset.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\boxed{\mathcal{R} \text{ est asymétrique} \iff \Gamma \cap {}^t\Gamma = \emptyset}$.

♦ (3) :
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \quad \mathcal{R} \text{ est asymétrique} \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x)\Big) \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(\neg(x\mathcal{R}y) \text{ ou } \neg(y\mathcal{R}x)\Big) \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(\neg(y\,{}^t\mathcal{R}x) \text{ ou } \neg(x\,{}^t\mathcal{R}y)\Big) \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(\neg(x\,{}^t\mathcal{R}y) \text{ ou } \neg(y\,{}^t\mathcal{R}x)\Big) \\
\iff & \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\,{}^t\mathcal{R}y \Rightarrow \neg(y\,{}^t\mathcal{R}x)\Big) \\
\iff & \quad {}^t\mathcal{R} \text{ est asymétrique.}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\boxed{\mathcal{R} \text{ est asymétrique si et seulement si } {}^t\mathcal{R} \text{ est asymétrique}}$.
**CQFD**.

## Proposition 85 (Symétrie et asymétrie)

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$. Soit $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

(1) $\mathcal{R}$ est symétrique et asymétrique si et seulement si $\Gamma = \emptyset$.

(2) S'il existe au moins deux éléments distincts dans $E$, alors il existe une relation binaire sur $E$ qui n'est ni symétrique ni asymétrique. Ainsi, la symétrie et l'asymétrie ne sont pas les négations l'une de l'autre.

*Démonstration*

♦ (1) :

- Supposons que $E = \emptyset$.

  Dans ce cas là, $E^2 = \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.
  En particulier, comme $\Gamma \subseteq E^2$, on a $\Gamma = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.

  De plus, on sait alors qu'il n'y a qu'une seule relation binaire sur $E$ d'après la prop. 53 p. 62, c'est donc $\mathcal{R}$.
  Et donc cette unique relation est symétrique et asymétrique d'après les exemples de ces deux relations.

  D'où l'équivalence.

- Supposons que $E \neq \emptyset$.

  Raisonnons par doubles implications :

  $\boxed{\Rightarrow}$

  Supposons que $\mathcal{R}$ est symétrique et asymétrique.

  On a alors les égalités et inclusions suivantes :
  $\Gamma = \{(x;y) \in \Gamma \mid (x;y) \in \Gamma\}$
  $= \{(x;y) \in \Gamma \mid x\mathcal{R}y\}$
  $= \{(x;y) \in \Gamma \mid x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y\}$
  $\subseteq \{(x;y) \in \Gamma \mid y\mathcal{R}x \text{ et } x\mathcal{R}y\}$ car $\mathcal{R}$ est symétrique
  $\subseteq \{(x;y) \in \Gamma \mid y\mathcal{R}x \text{ et } \neg(y\mathcal{R}x)\}$ car $\mathcal{R}$ est asymétrique
  $= \{(x;y) \in \Gamma \mid \text{assertion fausse}\}$ par le principe de non contradiction
  $= \{(x;y) \in \Gamma \mid (x;y) \neq (x;y)\}$ d'après la prop. 5 p. 6

$= \emptyset$ par définition de l'ensemble vide

Donc $\Gamma \subseteq \emptyset$.
Donc $\Gamma = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ est symétrique et asymétrique, alors } \Gamma = \emptyset}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\Gamma = \emptyset$.
Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, (x; y) \notin \Gamma$.
Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \neg[(x; y) \in \Gamma]$.
Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \neg(x\mathcal{R}y)$.
Notons $(\star)$ cette dernière assertion.

Premièrement, de $(\star)$ on déduit $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(\neg(x\mathcal{R}y) \text{ ou } y\mathcal{R}x\Big)$.
Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x\Big)$.
Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

Deuxièmement, de $(\star)$ on déduit $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(\neg(x\mathcal{R}y) \text{ ou } \neg(y\mathcal{R}x)\Big)$.
Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \Rightarrow \neg(y\mathcal{R}x)\Big)$.
Donc $\mathcal{R}$ est asymétrique.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \Gamma = \emptyset, \text{ alors } \mathcal{R} \text{ est symétrique et asymétrique}}$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est symétrique et asymétrique si et seulement si } \Gamma = \emptyset}$.

♦ (2) :
Supposons qu'il existe au moins deux éléments distincts dans $E$. Notons-les $x$ et $y$.
Considérons $\Gamma = \{(x; x); (x; y)\}$ puis $\mathcal{R} = \Big((E; E); \Gamma\Big)$.

Ainsi, comme $(x; x) \in \Gamma$, on a $x\mathcal{R}x$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas antiréflexive donc elle n'est pas asymétrique d'après la prop. 84 p. 98.
Mais $(x; y) \in \Gamma$ et $(y; x) \notin \Gamma$ donc $x\mathcal{R}y$ et $\neg(y\mathcal{R}x)$ donc $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.
**CQFD**.

## 4.6 Relations transitives

**Définition 41 (Relations transitives)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

On dit que $\mathcal{R}$ est **transitive** si et seulement si
$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z\Big)$

**Exemple** :
• La relation d'égalité est transitive d'après la prop. 1 p. 3.
• La relation d'inclusion est transitive d'après la prop. 3 p. 5.
• La relation d'inclusion stricte est transitive d'après la prop. 4 p. 6.
• L'unique relation $\mathcal{R}$ sur $\emptyset$ (unique d'après la prop. 53 p. 62) est transitive puisque l'assertion $\forall x \in \emptyset, \forall y \in \emptyset, \forall z \in \emptyset, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z\Big)$ est nécessairement vraie.

**Contre-exemple** :
• La relation d'appartenance n'est pas transitive.
Par exemple, si l'on prend $E = \emptyset$, $F = \{\emptyset\}$ et $G = \Big\{\{\emptyset\}\Big\}$, alors on a $E \in F$ et $F \in G$ mais pas $E \in G$.

**Proposition 86 (Conditions de transitivité)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$. Soit $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

(1) $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est transitive.

(2) $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $(\Gamma \circ \Gamma) \subseteq \Gamma$.

(3) $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si $(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \preccurlyeq \mathcal{R}$.

*Démonstration*

♦ (1) :
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} & \mathcal{R} \text{ est transitive} \\ \iff & \forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z\Big) \\ \iff & \forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \Big((y\,{}^t\mathcal{R}x \text{ et } z\,{}^t\mathcal{R}y) \Rightarrow z\,{}^t\mathcal{R}x\Big) \end{aligned}$$

$\iff \forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \Big((z\,{}^t\mathcal{R}y \text{ et } y\,{}^t\mathcal{R}x) \Rightarrow z\,{}^t\mathcal{R}x\Big)$
$\iff \forall z \in E, \forall y \in E, \forall x \in E, \Big((z\,{}^t\mathcal{R}y \text{ et } y\,{}^t\mathcal{R}x) \Rightarrow z\,{}^t\mathcal{R}x\Big)$
$\iff {}^t\mathcal{R}$ est transitive

On a donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est transitive si et seulement si } {}^t\mathcal{R} \text{ est transitive}}$.

♦ (2) :

- Supposons que $E = \emptyset$.

  Dans ce cas là, on a $E^2 = \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.
  Or, par définition $\Gamma \subseteq E^2$.
  Donc $\Gamma \subseteq \emptyset$.
  Donc $\Gamma = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.
  Donc $\Gamma \circ \Gamma = \emptyset \circ \emptyset \underset{42 \text{ p. } 53}{=} \emptyset = \Gamma$.
  Donc $\Gamma \circ \Gamma = \Gamma$ par transitivité de l'égalité.
  Donc $\Gamma \circ \Gamma \preccurlyeq \Gamma$ par réflexivité de $\preccurlyeq$.

  De plus, comme $E = \emptyset$, il y a une unique relation binaire sur $E$ (d'après la prop. 53 p. 62).
  Cette unique relation est donc $\mathcal{R}$.
  Or on a vu dans les exemples de relations transitives que cette unique relation est transitive.
  Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

  Ainsi, $\mathcal{R}$ est transitive et $(\Gamma \circ \Gamma) \preccurlyeq \Gamma$.
  D'où l'équivalence.

- Supposons que $E \neq \emptyset$.

  Dans ce cas là, on a $E^2 \neq \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.

  Raisonnons par doubles implications.

  $\boxed{\Rightarrow}$

  Supposons que $\mathcal{R}$ est transitive.

  Soit $u \in E^2$.
  Il existe donc $x$ et $z$ dans $E$ tels que $u = (x; z)$.
  Supposons que $u \in (\Gamma \circ \Gamma)$.
  Donc $(x; y) \in (\Gamma \circ \Gamma)$.
  Donc $x\Big((E; E); \Gamma \circ \Gamma\Big)z$.

Donc $x\Big((E;E);\Gamma\Big) \circ \Big((E;E);\Gamma\Big)z$.

Donc $x\mathcal{R} \circ \mathcal{R}z$.

Donc il existe $y \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.

Or, $\mathcal{R}$ est transitive.

Donc $x\mathcal{R}z$.

Donc $x\Big((E;E);\Gamma\Big)z$.

Donc $(x;z) \in \Gamma$.

Donc $u \in \Gamma$.

Ainsi, $\forall u \in E^2, \Big(u \in \Gamma \circ \Gamma \Rightarrow u \in \Gamma\Big)$.

Donc $(\Gamma \circ \Gamma) \subseteq \Gamma$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ est transitive, alors } (\Gamma \circ \Gamma) \subseteq \Gamma}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $(\Gamma \circ \Gamma) \subseteq \Gamma$.

Donc $\Big((E;E);\Gamma \circ \Gamma\Big) \preccurlyeq \Big((E;E);\Gamma\Big)$.

Or, $\Big((E;E);\Gamma \circ \Gamma\Big) = \Big((E;E);\Gamma\Big) \circ \Big((E;E);\Gamma\Big) = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

Donc $(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \preccurlyeq \Big((E;E);\Gamma\Big)$.

Or, $\Big((E;E);\Gamma\Big) = \mathcal{R}$.

Donc $(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \preccurlyeq \mathcal{R}$.

Montrons qu'alors $\mathcal{R}$ est transitive.

Soient $x, y$ et $z$ dans $E$.

Supposons que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.

Il existe donc $y \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.

Donc $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{R})z$.

Or, on a dit que $(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \preccurlyeq \mathcal{R}$.

Donc $x\mathcal{R}z$.

Donc $(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z\Big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Ainsi, $\boxed{\text{si } (\Gamma \circ \Gamma) \subseteq \Gamma, \text{ alors } \mathcal{R} \text{ est transitive}}$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est transitive si et seulement si } (\Gamma \circ \Gamma) \subseteq \Gamma}$.

♦ (3) :

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R} \text{ est transitive} \\
\underset{(2)}{\iff} \ & (\Gamma \circ \Gamma) \subseteq \Gamma \\
\iff \ & \Big((E;E);\Gamma \circ \Gamma\Big) \preccurlyeq \Big((E;E);\Gamma\Big) \\
\iff \ & \Big((E;E);\Gamma\Big) \circ \Big((E;E);\Gamma\Big) \preccurlyeq \Big((E;E);\Gamma\Big) \\
\iff \ & \mathcal{R} \circ \mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est transitive si et seulement si } (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \preccurlyeq \mathcal{R}}$.

**CQFD**.

## Proposition 87 (Transitivité et intersection)

Soit $E$ un ensemble. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires sur $E$.

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives, alors $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$ est transitive.

*Démonstration*

• Supposons que $E = \emptyset$.

Dans ce cas là, il y a une unique relation sur $E$ d'après la prop. 53 p. 62.

En particulier, on a $\mathcal{R} = \mathcal{S} = \mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$.

D'où l'implication.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

Supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives.

Montrons qu'alors $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$ est transitive.

Soient $x$, $y$ et $z$ dans $E$.

Supposons que $x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})y$ et $y(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})z$.

Donc $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{R}z$ et $y\mathcal{S}z$.

Donc $\Big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\Big)$ et $\Big(x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z\Big)$.

Or, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives.

Donc $x\mathcal{R}z$ et $x\mathcal{S}z$.

Donc $x(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})z$.

Donc $(x\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}z) \Rightarrow x\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}z$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \Big((x\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}z) \Rightarrow x\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}z\Big)$.
Donc $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$ est transitive.

Finalement, $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{S} \text{ sont transitives, alors } \mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \text{ est transitive.}}$.
**CQFD**.

## 4.7 Relations totales

**Définition 42 (Relations totales)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.

On dit que $\mathcal{R}$ est **totale** si et seulement si $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x\Big)$.

**Exemple** :
• L'unique relation $\mathcal{R}$ sur $\emptyset$ (unique d'après la prop. 53 p. 62) est totale puisque l'assertion $\forall x \in \emptyset, \forall y \in \emptyset, \Big(x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x\Big)$ est nécessairement vraie.

**Proposition 88 (Conditions de totalité)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$. Soit $\Gamma$ le graphe de $\mathcal{R}$.

(1) $\mathcal{R}$ est totale si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est totale.

(2) $\mathcal{R}$ est totale si et seulement si $\Gamma \cup {}^t\Gamma = E^2$.

(3) Si $\mathcal{R}$ est totale, alors $\mathcal{R}$ est réflexive.

*Démonstration*

♦ (1) :
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R} \text{ est totale} \\
\Longleftrightarrow\ & \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x\Big) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(y\,{}^t\mathcal{R}x \text{ ou } x\,{}^t\mathcal{R}y\Big) \\
\Longleftrightarrow\ & \forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\,{}^t\mathcal{R}y \text{ ou } y\,{}^t\mathcal{R}x\Big) \\
\Longleftrightarrow\ & {}^t\mathcal{R} \text{ est totale}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est totale si et seulement si } {}^t\mathcal{R} \text{ est totale}}$.

♦ (2) :

• Supposons $E = \emptyset$.

Dans ce cas là, $E$ possède une unique relation binaire d'après la prop. 53 p. 62, qui est donc $\mathcal{R}$.

Or, on a dit dans les exemples de relations totales que cette unique relation est totale.

Donc $\mathcal{R}$ est totale.

De plus, dans ce cas là, on a $E^2 = \emptyset^2 = \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.

Or, $\Gamma \subseteq E^2$ par définition d'un graphe.

Donc $\Gamma \subseteq \emptyset$.

Donc $\Gamma = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.

Donc ${}^t\Gamma = \emptyset$ Donc $\Gamma \cup {}^t\Gamma = \emptyset \cup \emptyset \underset{16 \text{ p. } 16}{=} = \emptyset = E^2$.

Donc $\Gamma \cup {}^t\Gamma = E^2$ par transitivité de l'égalité.

Ainsi, $\mathcal{R}$ est totale et $\Gamma \cup {}^t\Gamma = E^2$.

D'où $\boxed{\mathcal{R} \text{ est totale si et seulement si } \Gamma \cup {}^t\Gamma = E^2}$.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

Dans ce cas là, $E^2 \neq \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est totale.

Par définition $\Gamma$ est un graphe de $E$ donc $\Gamma \subseteq E^2$.

Donc ${}^t\Gamma \subseteq E^2$ par définition.

Donc $\Gamma \cup {}^t\Gamma \subseteq E^2$ d'après la prop. 16 p. 16.

Il nous reste donc à prouver que $\Gamma \cup {}^t\Gamma \supseteq E^2$.

Soit $u \in E^2$.

Il existe donc $x$ et $y$ dans $E$ tels que $u = (x; y)$.

On sait que $\mathcal{R}$ est totale.

Donc $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Donc $x\mathcal{R}y$ ou $x\,{}^t\mathcal{R}y$.

Donc $(x; y) \in \Gamma$ ou $(x; y) \in {}^t\Gamma$.

Donc $(x;y) \in \Gamma \cup {}^t\Gamma$.

Donc $u \in \Gamma \cup {}^t\Gamma$.

Ainsi, $\forall (x;y) \in E^2, (x;y) \in \Gamma \cup {}^t\Gamma$.

Donc $\Gamma \cup {}^t\Gamma \supseteq E^2$.

Donc $\Gamma \cup {}^t\Gamma = E^2$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ est totale, alors } \Gamma \cup {}^t\Gamma = E^2}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\Gamma \cup {}^t\Gamma = E^2$.

Soient $x$ et $y$ dans $E$.

Par hypothèse, on a donc $(x;y) \in \Gamma \cup {}^t\Gamma$.

Donc $(x;y) \in \Gamma$ ou $(x;y) \in {}^t\Gamma$.

Donc $x\mathcal{R}y$ ou $x\,{}^t\mathcal{R}y$.

Donc $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x\Big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est totale.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \Gamma \cup {}^t\Gamma = E^2, \text{ alors } \mathcal{R} \text{ est totale}}$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est totale si et seulement si } \Gamma \cup {}^t\Gamma = E^2}$.

♦ $(3)$ :

- Supposons que $E = \emptyset$.

  Dans ce cas là, il n'y a qu'une seule relation binaire sur $E$ d'après la prop. 53 p. 62. Cette unique relation est donc $\mathcal{R}$.

  Or, on a vu que cette unique relation était réflexive et totale dans les exemples de ces qualificatifs.

  Donc $\mathcal{R}$ est réflexive et totale.

  Donc $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ est totale, alors } \mathcal{R} \text{ est réflexive}}$.

- Supposons que $E \neq \emptyset$.

  Supposons que $\mathcal{R}$ est totale.

  Donc pour tout $x \in E$, on a $x\mathcal{R}x$ ou $x\mathcal{R}x$.

  Donc pour tout $x \in E$, on a $x\mathcal{R}x$.

  Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

  Ainsi, $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ est totale, alors } \mathcal{R} \text{ est réflexive}}$.

**CQFD**.

**Proposition 89 (Totalité et finesse)**

Soit $E$ un ensemble. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires sur $E$.

Si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ et si $\mathcal{R}$ est totale, alors $\mathcal{S}$ est totale.

*Démonstration*

• Supposons que $E = \emptyset$.

Dans ce cas, il n'y a qu'une seule relation binaire sur $E$ d'après la prop. 53 p. 62.

Donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

Donc $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ par réflexivité de $\preccurlyeq$.

De plus, cette unique relation sur $E$ est totale d'après les exemples de relations totales.

Donc $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont totales.

Finalement, on a $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$, et $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont totales.

Donc $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S} \text{ et si } \mathcal{R} \text{ est totale, alors } \mathcal{S} \text{ est totale}}$.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

Supposons que $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ et que $\mathcal{R}$ est totale.

Soient $x$ et $y$ dans $E$.

Comme $\mathcal{R}$ est totale, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.

Or, $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$.

Donc $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{S}y \text{ ou } y\mathcal{S}x\Big)$.

Donc $\mathcal{S}$ est totale.

Finalement, $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S} \text{ et si } \mathcal{R} \text{ est totale, alors } \mathcal{S} \text{ est totale}}$.

**CQFD**.

Chapitre 3

# Applications

## Sommaire

# 1 Généralités sur les applications

## 1.1 Relations fonctionnelles

**Définition 43 (Relations fonctionnelles)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$.

On dit que $\mathcal{R}$ est **fonctionnelle** si et seulement si
$\forall x \in E, \forall y \in F, \forall y' \in F, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y') \Rightarrow y = y'\Big)$.

**Exemple** :
• Si $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$, alors il y a une unique relation binaire $\mathcal{R}$ de $E$ dans $F$ d'après la prop. 53 p. 62.
Cette unique relation est alors fonctionnelle puisque les assertions
$\forall x \in \emptyset, \forall y \in F, \forall y' \in F, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y') \Rightarrow y = y'\Big)$
et $\forall x \in E, \forall y \in \emptyset, \forall y' \in \emptyset, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y') \Rightarrow y = y'\Big)$ sont nécessairement vraies.

**Proposition 90 (Existence de relations fonctionnelles)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Alors il existe au moins une relation fonctionnelle de $E$ dans $F$.

*Démonstration*

• Supposons que $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
Dans ce cas là, il existe une unique relation binaire de $E$ dans $F$ d'après la prop. 53 p. 62.
De plus, on a dit dans les exemples de relations fonctionnelles que cette unique relation était bien fonctionnelle.
D'où l'existence.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
Soit $y_0 \in F$. Posons $\Gamma = \{(x; y) \in E \times F \mid y = y_0\}$ puis $\mathcal{R} = \Big((E; F); \Gamma\Big)$.
$\mathcal{R}$ est bien une relation binaire de $E$ dans $F$.
Montrons qu'elle est fonctionnelle.

Soient $x \in E, y \in F, y' \in F$.

Supposons que $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}y'$.
En particulier, $(x;y) \in \Gamma$ et $(x;y') \in \Gamma$.
Donc $y = y_0$ et $y' = y_0$.
Donc $y = y'$.

Ainsi, $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}y' \Rightarrow y = y'$.

Donc $\forall x \in E, \forall y \in F, \forall y' \in F, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y') \Rightarrow y = y'\Big)$.
Donc $\mathcal{R}$ est fonctionnelle.
**CQFD**.

## Proposition 91 (Composition de relations fonctionnelles)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.
Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire de $E$ dans $F$, et $\mathcal{S}$ une relation binaire de $F$ dans $G$.

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont fonctionnelles, alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est fonctionnelle.

*Démonstration*

• Supposons que $E = \emptyset$ ou $G = \emptyset$.
Dans ce cas là, il n'y a qu'une seule relation binaire de $E$ dans $G$ d'après la prop. 53 p. 62.
Cette unique relation est donc $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
On a vu dans les exemples de relations fonctionnelles que cette unique relation était fonctionnelle.
Ainsi donc, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est fonctionnelle.

On a donc l'implication : $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{S} \text{ sont fonctionnelles, alors } \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ est fonctionnelle}}$.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$.

Dans ce cas là, on a $G^2 \neq \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.

Supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont fonctionnelles.
Soient $x \in E$ , $z \in G$ et $z' \in G$.
Supposons que $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$ et $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z'$.
Donc il existe $y$ et $y'$ dans $F$ tels que $\Big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z\Big)$ et $\Big(x\mathcal{R}y' \text{ et } y'\mathcal{S}z'\Big)$.
Donc $\Big(x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y'\Big)$ et $\Big(y\mathcal{S}z \text{ et } y'\mathcal{S}z'\Big)$.
Or, $\mathcal{R}$ est fonctionnelle, donc comme $\Big(x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y'\Big)$, on a $y = y'$.

On a donc $\Big(y\mathcal{S}z$ et $y\mathcal{S}z'\Big)$.

Or, $\mathcal{S}$ est fonctionnelle, donc $z = z'$.

Donc $\forall x \in E, \forall z \in G, \forall z' \in G, \Big((x\mathcal{S}\circ\mathcal{R}z$ et $x\mathcal{S}\circ\mathcal{R}z') \Rightarrow z = z'\Big)$.

Donc $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ est fonctionnelle.

Ainsi, $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{S} \text{ sont fonctionnelles, alors } \mathcal{S}\circ\mathcal{R} \text{ est fonctionnelle}}$.

**CQFD**.

## Proposition 92 (Relations fonctionnelles, finesse et intersection)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires de $E$ dans $F$.

(1) Si $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ et si $\mathcal{S}$ est fonctionnelle, alors $\mathcal{R}$ est fonctionnelle.

(2) Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont fonctionnelles, alors $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$ est fonctionnelle.

*Démonstration*

♦ (1) :

• Supposons que $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.

Dans ce cas là, il n'y a qu'une seule relation binaire de $E$ dans $F$ d'après la prop. 53 p. 62.

Cette unique relation est donc $\mathcal{R}$.

Or, on a vu dans les exemples de relations fonctionnelles que cette unique relation était fonctionnelle.

Donc $\mathcal{R}$ est fonctionnelle.

On a donc l'implication $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S} \text{ et si } \mathcal{S} \text{ est fonctionnelle, alors } \mathcal{R} \text{ est fonctionnelle}}$.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.

Dans ce cas-là, $F^2 \neq \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.

Supposons que $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}$ est fonctionnelle.

Soient $x \in E, y \in F$ et $y' \in F$.

Supposons que $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}y'$.

Par hypothèse, on a $\mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S}$.

Donc $x\mathcal{S}y$ et $x\mathcal{S}y'$.

Or, $\mathcal{S}$ est fonctionnelle.

Donc $y = y'$.

Ainsi, $(x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y') \Rightarrow y = y'$.

On a donc $\forall x \in E, \forall y \in F, \forall y' \in F, \Big((x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{R}y') \Rightarrow y = y'\Big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est fonctionnelle.

Finalement, $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \preccurlyeq \mathcal{S} \text{ et si } \mathcal{S} \text{ est fonctionnelle, alors } \mathcal{R} \text{ est fonctionnelle}}$.

♦ (2) :

- Supposons que $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.

  Dans ce cas là, il n'y a qu'une seule relation binaire de $E$ dans $F$ d'après la prop. 53 p. 62.

  Cette unique relation est donc $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$.

  Or, on a vu dans les exemples de relations fonctionnelles que cette unique relation était fonctionnelle.

  Donc $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$ est fonctionnelle.

  On a donc l'implication $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{S} \text{ sont fonctionnelles, alors } \mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \text{ est fonctionnelle}}$.

- Supposons que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.

  Dans ce cas là, on a $F^2 \neq \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.

  Supposons que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont fonctionnelles.

  Soient $x \in E, y \in F$ et $y' \in F$.

  Supposons que $x\,(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})\,y$ et $x\,(\mathcal{R} \Cap \mathcal{S})\,y'$.

  Donc $\Big(x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y\Big)$ et $\Big(x\mathcal{R}y' \text{ et } x\mathcal{S}y'\Big)$.

  En particulier, on a $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{R}y'$.

  Or, $\mathcal{R}$ est fonctionnelle.

  Donc $y = y'$.

  Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in F, \forall y' \in F, \Big((x\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}y \text{ et } x\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}y') \Rightarrow y = y'\Big)$.

  Donc $\mathcal{R} \Cap \mathcal{S}$ est fonctionnelle.

Finalement, $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ et } \mathcal{S} \text{ sont fonctionnelles, alors } \mathcal{R} \Cap \mathcal{S} \text{ est fonctionnelle}}$.

**CQFD**.

## 1.2 Applications

**Définition 44 (Applications)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f$ une relation binaire de $E$ dans $F$.

• On dit que $f$ est une **application** de $E$ dans $F$ si et seulement si :

(1) $f$ est fonctionnelle

(2) $\operatorname{dom}(f) = E$

• Dans ce cas là, la condition $(2)$ nous assure que tout élément $x$ de $E$ est relié par $f$ à un moins un élément $y$ de $F$, et la condition $(1)$ nous assure que cet élément est unique.

• Pour $x \in E$, on notera $f(x)$ l'unique $y \in F$ tel que $xfy$.

• Pour $x \in E$, on dira que $f(x)$ est **l'image** de $x$ par $f$.

• Pour $x \in E$, on dira que $x$ est **un antécédent** de $f(x)$ par $f$.

• On notera $f : E \to F$ pour signifier que $f$ est une application de $E$ dans $F$.

• On notera parfois $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ à la place de $f$.

**Exemple** :
• Si $E = \emptyset$, alors l'unique relation binaire $f$ de $E$ dans $F$ est une application.
En effet, on a vu qu'elle était fonctionnelle.
De plus, $\operatorname{dom}(f) \subseteq E$ donc $\operatorname{dom}(f) \subseteq \emptyset$ donc $\operatorname{dom}(f) = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8 donc $\operatorname{dom}(f) = E$.
Donc $f$ est une application.

**Remarque 2**

L'exemple précédent met l'accent sur une propriété que nous utiliserons plusieurs fois par la suite : pour tout ensemble $F$, il existe une unique application de $\emptyset$ dans $F$.

**Proposition 93 (Existence d'applications)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Si $E = \emptyset$ ou $F \neq \emptyset$, alors il existe au moins une application de $E$ dans $F$.

*Démonstration*

• Supposons $E = \emptyset$.

Dans ce cas, il existe une unique application de $E$ dans $F$ d'après la remarque 2 page 116.

D'où l'existence.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.

Soit $y_0 \in F$. Soit $\Gamma = \{(x; y) \in E \times F \mid y = y_0\}$. Soit $f = \Big((E; F); \Gamma\Big)$.

On a vu lors de la démonstration de la proposition 90 page 112 que $f$ était fonctionnelle.

Il reste donc à montrer que $\text{dom}(f) = E$.

On sait déjà par définition de $\text{dom}(f)$ que $\text{dom}(f) \subseteq E$.

Il suffit donc de montrer que $E \subseteq \text{dom}(f)$.

Soit $x \in E$.

On a $(x; y_0) \in \Gamma$.

Donc $f(x) = y_0$.

Donc il existe $y \in F$ tel que $f(x) = y$.

Donc $x \in \text{dom}(f)$.

On a donc $\forall x \in E, x \in \text{dom}(f)$.

Donc $E \subseteq \text{dom}(f)$.

Donc $E = \text{dom}(f)$.

Donc $f$ est une application.

D'où l'existence.

**CQFD**.

**Remarque 3**

Une relation binaire d'un ensemble $E$ dans $F$ est un couple $\Big((E; F); \Gamma\Big)$ où $\Gamma \subseteq E \times F$.

On a $E \in \{E\}$ et $F \in \{F\}$ donc $(E; F) \in \{E\} \times \{F\}$, et $\Gamma \in \mathcal{P}(E \times F)$.

Ainsi, on peut dire qu'une relation binaire de $E$ dans $F$ est un élément de $\Big(\{E\} \times \{F\}\Big) \times \mathcal{P}(E \times F)$.

**Notation**

• Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On notera $\mathcal{A}(E \to F)$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$.
On a en fait $\mathcal{A}(E \to F) = \left\{ f \in \Big( \{E\} \times \{F\} \Big) \times \mathcal{P}(E \times F) \;\Big|\; f \text{ est une application} \right\}$.
On le notera aussi $F^E$.

• La plupart des auteurs notent cet ensemble $\mathcal{F}(E;F)$ ou encore $\mathcal{A}(E;F)$.

## Proposition 94 (Égalité entre applications)

Soient $E$, $E'$, $F$ et $F'$ quatre ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$.

On a alors $f = g$ si et seulement si :

(1) $E = E'$

(2) $F = F'$

(3) $\forall x \in E, f(x) = g(x)$

*Démonstration*

D'après la proposition 50 page 60, on a $f = g$ si et seulement si $E = E'$, $F = F'$ et leurs graphes sont égaux.

On se place dans le cas où $E = E'$ et $F = F'$.
Notons $\Gamma$ le graphe de $f$, et $\Sigma$ le graphe de $g$.
Il nous suffit donc de montrer que $\Gamma = \Sigma$ si et seulement si $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

• Supposons que $E = \emptyset$ ou que $F = \emptyset$.

Dans ce cas là, $E \times F = \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.
Or, $\Gamma \subseteq E \times F$ par définition.
Donc $\Gamma \subseteq \emptyset$.
Donc $\Gamma = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.

De même, comme $E = E'$ et $F = F'$, on a $E' \times F' = \emptyset$.
Or, $\Sigma \subseteq E' \times F'$ par définition.
Donc $\Sigma \subseteq \emptyset$.
Donc $\Sigma = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.

Ainsi, $\Gamma = \emptyset = \Sigma$ donc $\Gamma = \Sigma$.

De plus, comme $E = \emptyset$, l'assertion $\forall x \in E, f(x) = g(x)$ est vraie.

On a donc bien l'équivalence $\Gamma = \Sigma \iff \forall x \in E, f(x) = g(x)$.
D'où l'équivalence que l'on voulait montrer.

• Supposons que $E \neq \emptyset$ et $F \neq \emptyset$.
Raisonnons par double implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\Gamma = \Sigma$.

Soit $x \in E$.
Par définition, $f(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $xfy$.
Donc $f(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $(x; y) \in \Gamma$.
Donc $f(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $(x; y) \in \Sigma$.

Or, $g(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $xgy$.
Donc $g(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $(x; y) \in \Sigma$.

D'après ce que l'on vient de dire, on a donc $f(x) = g(x)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.
Ainsi, si $\Gamma = \Sigma$, alors $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Soit $z \in E \times F$. Il existe donc $x \in E$ et $y \in F$ tels que $z = (x; y)$.
On a les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned}
& z \in \Gamma \\
\iff & (x; y) \in \Gamma \\
\iff & xfy \\
\iff & y = f(x) \\
\iff & y = g(x) \text{ par hypothèse} \\
\iff & xgy \\
\iff & (x; y) \in \Sigma \\
\iff & z \in \Sigma
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall z \in E \times F, \Big(z \in \Gamma \iff z \in \Sigma\Big)$.

Donc $\Gamma = \Sigma$.

Ainsi, si $\forall x \in E, f(x) = g(x)$, alors $\Gamma = \Sigma$.

Finalement, $\Gamma = \Sigma$ si et seulement $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

D'où l'équivalence recherchée.

**CQFD**.

### Définition 45 (Point fixe)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles tels que $E \subseteq F$.

Soit $x_0 \in E$. Soit $f : E \to F$.

On dit que $x_0$ est un **point fixe** de $f$ si et seulement si $f(x_0) = x_0$.

On note $\mathcal{F}\mathrm{ix}(f)$ l'ensemble des points fixes de $f$ : ainsi $\mathcal{F}\mathrm{ix}(f) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$.

## 1.3 Applications particulières

### Définition 46 (Application identité)

Soit $E$ un ensemble.

On appelle **application identité** sur $E$ l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

On la note plutôt $\mathrm{id}_E$. Ainsi, $\forall x \in E, \mathrm{id}_E(x) = x$.

### Proposition 95 (Identité et graphe)

Soit $E$ un ensemble. Soit $\Delta_E$ la diagonale de $E^2$.

$\Delta_E$ est le graphe de $\mathrm{id}_E$.

*Démonstration*

• Supposons que $E = \emptyset$.
Dans ce cas là, il n'y a qu'un seul graphe sur $E$ d'après la prop. 39 p. 50.
En particulier, le graphe de $\mathrm{id}_E$ et $\Delta_E$ sont égaux.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.
Dans ce cas là, $E^2 \neq \emptyset$ d'après la prop. 35 p. 46.
Notons $\Gamma$ le graphe de $\mathrm{id}_E$.

Soit $z \in E^2$. Il existe donc $x \in E$ et $y \in E$ tels que $z = (x; y)$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & z \in \Gamma \\ \iff & (x; y) \in \Gamma \\ \iff & \mathrm{id}_E(x) = y \\ \iff & x = y \\ \iff & (x; y) \in \Delta_E \\ \iff & z \in \Delta_E \end{aligned}$$

Donc $\forall z \in E^2, \Big(z \in \Gamma \iff z \in \Delta_E\Big)$.
Donc $\Gamma = \Delta_E$.
**CQFD**.

## Définition 47 (Applications constantes)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

On dit que $f$ est **constante** si et seulement s'il existe $c \in F$ tel que $\forall x \in E, f(x) = c$.

## Définition 48 (Injection canonique)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides tels que $E \subseteq F$.

On appelle **injection canonique** de $E$ dans $F$ l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

**Remarque** :
L'injection canonique de $E$ dans $E$ est tout simplement l'identité sur $E$.

**Définition 49 (Projections cartésiennes)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides.

• On appelle **projection cartésienne gauche** de $E \times F$ l'application $\begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x;y) & \longmapsto & x \end{array}$

• On appelle **projection cartésienne droite** de $E \times F$ l'application $\begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & F \\ (x;y) & \longmapsto & y \end{array}$

## 1.4 L'axiome du choix

**Axiome 7 (du choix)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $X = E - \{\emptyset\}$.

Alors il existe $f : X \to \bigcup X$ telle que pour tout $A \in X$, $f(A) \in A$.

**Pour la petite histoire**

Ernst Zermelo (1871-1953) est un mathématicien allemand. Il s'est principalement intéressé aux fondations des mathématiques et à la philosophie. Il a donné des développements importants à la théorie des ensembles et fut un des précurseurs de la théorie des jeux.

L'axiome du choix a pour la première fois été formulé par Ernst Zermelo en 1904 pour la démonstration du théorème de Zermelo que nous verrons plus tard.

# 2 Composition d'applications

## 2.1 Composition

**Proposition 96 (Composition d'applications)**

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

Alors $g \circ f$ est une application de $E$ dans $G$.

*Démonstration*

Par hypothèse, $f$ est une application donc en particulier $f$ fonctionnelle.

De même, $g$ est une application donc $g$ est fonctionnelle.

Donc d'après la prop. 91 p. 113, $g \circ f$ est fonctionnelle.

Il reste donc à montrer que $\text{dom}(g \circ f) = E$.

• Supposons que $E = \emptyset$.

On sait que $\text{dom}(g \circ f) \subseteq E$ par définition du domaine.

Donc $\text{dom}(g \circ f) \subseteq \emptyset$.

Donc $\text{dom}(g \circ f) = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.

Donc $\text{dom}(g \circ f) = E$.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

On sait déjà que $\text{dom}(g \circ f) \subseteq E$ par définition du domaine.

Il nous reste donc à montrer que $E \subseteq \text{dom}(g \circ f)$.

Soit $x \in E$.

Par définition, en posant $y_0 = f(x)$, on a $x f y_0$.

Par définition, en posant $z_0 = g(y_0)$, on a $y_0 g z_0$.

Ainsi, il existe $y \in F$ tel que $x f y$ et $y g z_0$.

Donc $x(g \circ f)z_0$.

Donc il existe $z \in G$ tel que $x(g \circ f)z$.

Donc $x \in \text{dom}(g \circ f)$.

Donc $\forall x \in E, x \in \text{dom}(g \circ f)$.

Donc $E \subseteq \text{dom}(g \circ f)$.

Donc $E = \text{dom}(g \circ f)$.

Donc $\boxed{g \circ f \text{ est une application}}$.
**CQFD**.

## Proposition 97 (Autre écriture de la composée d'applications)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

On a alors $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Autrement dit, $g \circ f = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{pmatrix}$.

*Démonstration*

• Si $E = \emptyset$, c'est immédiat puisqu'il n'y a alors qu'une seule relation binaire de $E$ dans $G$ d'après la prop. 53 p. 62 donc $g \circ f$ et celle-ci sont égales.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.
Soit $x \in E$.

Posons $z_0 = g(f(x))$ et $y_0 = f(x)$.
On a donc $z_0 = g(y_0)$ donc $y_0 g z_0$.
On a aussi $y_0 = f(x)$ donc $x f y_0$.

Ainsi, il existe $y \in F$ tel que $x f y$ et $y g z_0$.
Donc $x(g \circ f)z_0$.

Or, $g \circ f$ est une application donc $(g \circ f)(x)$ est l'unique $z \in G$ tel que $x(g \circ f)z$.
Donc $z_0 = (g \circ f)(x)$.
Or, par définition $z_0 = g(f(x))$.
Donc $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.
**CQFD**.

## Proposition 98 (Neutralité de l'identité)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

(1) On a $f \circ \mathrm{id}_E = f$.
On dit que $\mathrm{id}_E$ est **neutre à droite** pour la composition d'applications.

(2) On a $\mathrm{id}_F \circ f = f$.
On dit que $\mathrm{id}_F$ est **neutre à gauche** pour la composition d'applications.

(3) Soit $g : E \to E$.
On a alors $g \circ \mathrm{id}_E = g = \mathrm{id}_E \circ g$.
On dit que $\mathrm{id}_E$ est **neutre** pour la composition d'applications de $E$ dans $E$.

*Démonstration*

- Supposons que $E = \emptyset$.

  Dans ce cas là, il n'y a qu'une seule relation de $E$ dans $F$ d'après la prop. 53 p. 62.
  En particulier, $f \circ \mathrm{id}_E = f = \mathrm{id}_F \circ f$ d'où $(1)$ et $(2)$.

  De même, il n'y a qu'une seule relation de $E$ dans $E$ et donc $g \circ \mathrm{id}_E = g = \mathrm{id}_E \circ g$ d'où $(3)$.

- Supposons que $E \neq \emptyset$.
  - ♦ $(1)$ :

    Soit $x \in E$. On a les égalités suivantes :
    $(f \circ \mathrm{id}_E)(x) \underset{97 \text{ p. } 124}{=} f(\mathrm{id}_E(x)) \underset{46 \text{ p. } 120}{=} f(x)$.
    Donc $(f \circ \mathrm{id}_E)(x) = f(x)$.

    Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a $\forall x \in E, (f \circ \mathrm{id}_E)(x) = f(x)$.
    Donc $\boxed{f \circ \mathrm{id}_E = f}$ d'après la prop. 94 p. 118.

  - ♦ $(2)$ :

    Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :
    $(\mathrm{id}_F \circ f)(x) \underset{97 \text{ p. } 124}{=} \mathrm{id}_F(f(x)) \underset{46 \text{ p. } 120}{=} f(x)$.
    Donc $(\mathrm{id}_F \circ f)(x) = f(x)$.

    Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a $\forall x \in E, (\mathrm{id}_F \circ f)(x) = f(x)$.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_F \circ f = f}$ d'après la prop. 94 p. 118.

♦ $(3)$ :

Ici, on utilise $(1)$ et $(2)$ avec $E = F$ et en utilisant $g$ à la place de $f$.

Ainsi, on a $g \circ \mathrm{id}_E \underset{(1)}{=} g \underset{(2)}{=} \mathrm{id}_E \circ g$.

**CQFD.**

## Définition 50 (Applications idempotentes)

Soit $E$ un ensemble. Soit $f : E \to E$.

On dit que $f$ est **idempotente** si et seulement si $f \circ f = f$, autrement dit $f^2 = f$.

**Exemple** :

• L'application identité sur $E$ est idempotente puisque neutre : $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$ d'après la prop. 98 p. 125.

## Définition 51 (Applications qui commutent)

Soit $E$ un ensemble. Soient $f : E \to E$ et $g : E \to E$.

On dit que $f$ et $g$ **commutent** si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

**Exemple** :

• L'identité sur $E$ commute avec toute application de $E$ dans $E$ d'après la prop. 98 p. 125.

## Proposition 99 (Image d'une composition)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

On a alors $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{im}(g)$.

*Démonstration*

Soit $z \in G$.

Supposons que $z \in \mathrm{im}(g \circ f)$.

Il existe donc $x \in E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$.

Donc $z = g(f(x))$.

Posons $y_0 = f(x) \in F$.

On a donc $z = g(y_0)$.

Il existe donc $y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Donc $z \in \text{im}(g)$.
Donc si $z \in \text{im}(g \circ f)$, alors $z \in \text{im}(g)$.
Donc $\forall z \in G, \Big(z \in \text{im}(g \circ f) \Rightarrow z \in \text{im}(g)\Big)$.
Donc $\boxed{\text{im}(g \circ f) \subseteq \text{im}(g)}$.

## 2.2 Inverse

**Définition 52 (Applications inversibles)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

(1) On dit que $f$ est **inversible à droite** si et seulement s'il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \text{id}_F$.
On dit alors que $g$ est **un inverse à droite** de $f$, ou encore que $g$ est une **section** de $f$.

(2) On dit que $f$ est **inversible à gauche** si et seulement s'il existe $h : F \to E$ telle que $h \circ f = \text{id}_E$.
On dit alors que $h$ est **un inverse à gauche** de $f$, ou encore que $h$ est une **rétractation** de $f$.

(3) On dit que $f$ est **inversible** si et seulement si $f$ est inversible à droite et à gauche.

**Exemple** :

- Pour un ensemble $E$, $\text{id}_E$ est inversible puisque $\text{id}_E \circ \text{id}_E = \text{id}_E$ d'après la prop. 98 p. 125.

**Proposition 100 (Unicité des inverses)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$. Soient $g : F \to E$ et $h : F \to E$.
Supposons que $f$ est **inversible**.

$(1)$ Si $g$ est un inverse à droite de $f$, et si $h$ est un inverse à gauche de $f$, alors $g = h$.

$(2)$ Si $g$ et $h$ sont des inverses à droite de $f$, alors $g = h$.

$(3)$ Si $g$ et $h$ sont des inverses à gauche de $f$, alors $g = h$.

Autrement dit, si $f$ est inversible, alors il n'existe qu'une seule application qui soit inverse de $f$, que ça soit à gauche ou à droite.

*Démonstration*

- $(1)$ :

  Supposons donc que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et que $h \circ f = \mathrm{id}_E$.

  On a les égalités suivantes :

  $g \underset{98 \text{ p. } 125}{=} \mathrm{id}_E \circ g = (h \circ f) \circ g \underset{58 \text{ p. } 68}{=} h \circ (f \circ g) = h \circ \mathrm{id}_F \underset{98 \text{ p. } 125}{=} h.$

  Donc $\boxed{g = h}$.

- $(2)$ :

  Supposons donc $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $f \circ h = \mathrm{id}_F$.
  Par hypothèse, $f$ est inversible donc est aussi inversible à gauche.
  Soit $i : F \to E$ une inverse à gauche de $f$.

  D'après $(1)$, on a $g = i$ et $h = i$.
  Donc on a $\boxed{g = h}$ par transitivité de l'égalité.

- $(3)$ :

  Supposons donc que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $h \circ f = \mathrm{id}_E$.
  Par hypothèse, $f$ est inversible donc est aussi inversible à droite.
  Soit $i : F \to E$ une inverse à droite de $f$.

  D'après $(1)$, on a $i = g$ et $i = h$.

Donc on a $\boxed{g = h}$ par transitivité de l'égalité.
**CQFD**.

## Définition 53 (Inverse d'une application)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

Si $f$ est inversible, alors la proposition précédente nous assure que :

— il existe une unique application à la fois inverse à gauche et à droite de $f$

— c'est aussi la seule application inverse à gauche de $f$

— c'est aussi la seule application inverse à droite de $f$

On dira que cette application est **l'inverse** de $f$, et on la notera $f^{-1}$.
Ainsi, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

## Proposition 101 (Involution de l'inverse)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

Si $f$ est inversible, alors $f^{-1}$ est inversible, et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
On dit que le passage à l'inverse est une **involution**.

*Démonstration*

Supposons que $f$ est inversible.

Donc $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.
Donc par définition de l'inversibilité, $f^{-1}$ est inversible et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
**CQFD**.

## Proposition 102 (Inverse d'une composée d'applications)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

Si $f$ et $g$ sont inversibles, alors $g \circ f$ est inversible et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

*Démonstration*

Supposons que $f$ et $g$ sont inversibles.

On a alors les égalités suivantes :
$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$
$= \Big((g \circ f) \circ f^{-1}\Big) \circ g^{-1}$ par associativité de la composition d'applications
$= \Big(g \circ (f \circ f^{-1})\Big) \circ g^{-1}$ toujours par associativité de la composition
$= (g \circ \mathrm{id}_F) \circ g^{-1}$ par définition de $f^{-1}$
$= g \circ g^{-1}$ par neutralité à droite de $\mathrm{id}_F$
$= \mathrm{id}_G$ par définition de $g^{-1}$.

Ainsi, $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_G$.
En particulier, $g \circ f$ est inversible à droite, et $f^{-1} \circ g^{-1}$ en est une inverse à droite.

De même, on a les égalités suivantes :
$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)$
$= f^{-1} \circ \Big(g^{-1} \circ (g \circ f)\Big)$ par associativité de la composition
$= f^{-1} \circ \Big((g^{-1} \circ g) \circ f\Big)$ toujours par associativité de la composition
$= f^{-1} \circ (\mathrm{id}_F \circ f)$ par définition de $g^{-1}$
$= f^{-1} \circ f$ par neutralité à gauche de $\mathrm{id}_F$
$= \mathrm{id}_E$ par définition de $f^{-1}$.

Ainsi, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_E$.
En particulier, $g \circ f$ est inversible à gauche, et $f^{-1} \circ g^{-1}$ en est une inverse à gauche.

Ainsi, $g \circ f$ est inversible à gauche et à droite donc $\boxed{g \circ f \text{ est inversible}}$.
De plus $f^{-1} \circ g^{-1}$ est un inverse à gauche (et à droite) de $g \circ f$.
Or, par définition de $(g \circ f)^{-1}$, c'est le seul inverse à gauche (et à droite) de $g \circ f$.
Donc $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$.
**CQFD**.

## Proposition 103

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

(1) Si $f$ et $g \circ f$ sont inversibles, alors $g$ est inversible.

(2) Si $g$ et $g \circ f$ sont inversibles, alors $f$ est inversible.

*Démonstration*

♦ (1) :

Supposons que $f$ et $g \circ f$ sont inversibles.

Donc $f^{-1}$ et $g \circ f$ sont inversibles d'après la prop. 101 p. 129.

Donc $(g \circ f) \circ f^{-1}$ est inversible d'après la prop. 102 p. 129.

Or, $(g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ \mathrm{id}_F = g$.

Donc $g$ est inversible.

♦ (2) :

Supposons que $g$ et $g \circ f$ sont inversibles.

Donc $g^{-1}$ et $g \circ f$ sont inversibles d'après la prop. 101 p. 129.

Donc $g^{-1} \circ (g \circ f)$ est inversible d'après la prop. 102 p. 129.

Or, $g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = \mathrm{id}_F \circ f = f$.

Donc $f$ est inversible.

**CQFD**.

**Proposition 104 (Composition et inversibilité à gauche et à droite)**

Soient $E$, $F \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$ trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

**Inversibilité à gauche**

$(1)$ Si $f$ et $g$ sont inversibles à gauche, alors $g \circ f$ est inversible à gauche.

$(2)$ Si $g \circ f$ est inversible à gauche, alors $f$ est inversible à gauche.

**Inversibilité à droite**

$(3)$ Si $f$ et $g$ sont inversibles à droite, alors $g \circ f$ est inversible à droite.

$(4)$ Si $g \circ f$ est inversible à droite, alors $g$ est inversible à droite.

**Inversibilité à gauche et à droite**

$(5)$ Si $f$ est inversible à droite et $g \circ f$ est inversible à gauche, alors $g$ est inversible à gauche.

$(6)$ Si $g$ est inversible à gauche et $g \circ f$ est inversible à droite, alors $f$ est inversible à droite.

*Démonstration*

♦ $(1)$ :

Supposons que $f$ et $g$ sont inversibles à gauche.

Il existe donc $h_f : F \to E$ et $h_g : G \to F$ telles que $h_f \circ f = \mathrm{id}_E$ et $h_g \circ g = \mathrm{id}_F$.

Alors $(h_f \circ h_g) \circ (g \circ f) = h_f \circ (h_g \circ g) \circ f = h_f \circ \mathrm{id}_F \circ f = h_f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Donc $(h_f \circ h_g) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_E$.

Donc il existe $i : G \to E$ telle que $i \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_E$.

Donc $\boxed{g \circ f \text{ est inversible à gauche}}$.

♦ $(2)$ :

Supposons que $g \circ f$ est inversible à gauche.

Il existe donc $h : G \to E$ telle que $h \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_E$.

Donc $(h \circ g) \circ f = \mathrm{id}_E$ par associativité de la composition.

Donc il existe $i : F \to E$ telle que $i \circ f = \mathrm{id}_E$.

Donc $\boxed{f \text{ est inversible à gauche}}$.

♦ $(3)$ :

Supposons que $f$ et $g$ sont inversibles à droite.

Il existe donc $h_f : F \to E$ et $h_g : G \to F$ telles que $f \circ h_f = \mathrm{id}_F$ et $g \circ h_g = \mathrm{id}_G$.

Donc $(g \circ f) \circ (h_f \circ h_g) = g \circ (f \circ h_f) \circ h_g = g \circ \mathrm{id}_F \circ h_g = g \circ h_g = \mathrm{id}_G$.

Donc $(g \circ f) \circ (h_f \circ h_g) = \mathrm{id}_G$.

Donc il existe $i : G \to E$ telle que $(g \circ f) \circ i = \mathrm{id}_G$.

Donc $\boxed{g \circ f \text{ est inversible à droite}}$.

♦ $(4)$ :

Supposons que $g \circ f$ est inversible à droite.

Il existe donc $h : G \to E$ telle que $(g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_G$.

Donc $g \circ (f \circ h) = \mathrm{id}_G$ par associativité de la composition.

Donc il existe $i : G \to F$ telle que $g \circ i = \mathrm{id}_G$.

Donc $\boxed{g \text{ est inversible à droite}}$.

♦ $(5)$ :

Supposons que $f$ est inversible à droite et que $g \circ f$ est inversible à gauche.

Il existe donc $h : F \to E$ et $i : G \to E$ telles que $f \circ h = \mathrm{id}_F$ et $i \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_E$.

Donc $i \circ g \circ f = \mathrm{id}_E$ par associativité de la composition.

Donc $i \circ g \circ f \circ h = \mathrm{id}_E \circ h$.

Donc $i \circ g \circ f \circ h = h$ par neutralité de $\mathrm{id}_E$.

Donc $i \circ g \circ (f \circ h) = h$ par associativité de la composition.

Donc $i \circ g \circ \mathrm{id}_F = h$ par définition de $h$.

Donc $i \circ g = h$ par neutralité de $\mathrm{id}_F$.

Donc $f \circ i \circ g = f \circ h$.

Donc $f \circ i \circ g = \mathrm{id}_F$ par définition de $h$.

Donc $(f \circ i) \circ g = \mathrm{id}_F$ par associativité de la composition.

Donc il existe $j : G \to F$ telle que $j \circ g = \mathrm{id}_F$.

Donc $\boxed{g \text{ est inversible à gauche}}$.

♦ $(6)$ :

Supposons que $g$ est inversible à gauche et que $g \circ f$ est inversible à droite.

Il existe donc $h : G \to F$ et $i : G \to E$ telles que $h \circ g = \mathrm{id}_F$ et $(g \circ f) \circ i = \mathrm{id}_G$.

Donc $g \circ f \circ i = \mathrm{id}_G$ par associativité de la composition.

Donc $h \circ g \circ f \circ i = h \circ \mathrm{id}_G$.

Donc $h \circ g \circ f \circ i = h$ par neutralité de $\mathrm{id}_G$.
Donc $(h \circ g) \circ f \circ i = h$ par associativité de la composition.
Donc $\mathrm{id}_F \circ f \circ i = h$ par définition de $h$.
Donc $f \circ i = h$ par neutralité de $\mathrm{id}_F$.
Donc $f \circ i \circ g = h \circ g$.
Donc $f \circ i \circ g = \mathrm{id}_F$ par définition de $h$.
Donc $f \circ (i \circ g) = \mathrm{id}_F$.
Donc il existe $j : F \to E$ telle que $f \circ j = \mathrm{id}_F$.
Donc $\boxed{f \text{ est inversible à droite}}$.
**CQFD**.

## 2.3 Régularité

**Définition 54 (Applications régulières)**

Soient $E$ et $F \neq \emptyset$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

$(1)$ On dit que $f$ est **régulière à gauche** (ou **simplifiable à gauche**) si et seulement si pour tout ensemble $G$ et tout $g : G \to E$ et $h : G \to E$, $\Big(f \circ g = f \circ h\Big) \Rightarrow g = h$.

$(2)$ On dit que $f$ est **régulière à droite** (ou **simplifiable à droite**) si et seulement si pour tout ensemble $G$ et tout $g : F \to G$ et $h : F \to G$, $\Big(g \circ f = h \circ f\Big) \Rightarrow g = h$.

$(3)$ On dit que $f$ est **régulière** (ou **simplifiable**) si et seulement si $f$ est régulière à gauche et à droite.

**Exemple** :
• Pour un ensemble $E$, l'identité sur $E$ est régulière.

**Proposition 105 (Inversibilité et régularité)**

$(1)$ Une application inversible à gauche est régulière à gauche.

$(2)$ Une application inversible à droite est régulière à droite.

$(3)$ Une application inversible est régulière.

*Démonstration*

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

♦ $(1)$ :

Supposons que $f$ soit inversible à gauche. Soit $i$ une inverse à gauche de $f$.

Soit $G$ un ensemble. Soient $g : G \to E$ et $h : G \to E$ telles que $f \circ g = f \circ h$.

On a alors $g \underset{98 \text{ p. } 125}{=} \mathrm{id}_E \circ g = (i \circ f) \circ g \underset{58 \text{ p. } 68}{=} i \circ (f \circ g) = i \circ (f \circ h) \underset{58 \text{ p. } 68}{=} (i \circ f) \circ h = \mathrm{id}_E \circ h \underset{98 \text{ p. } 125}{=} h$.

Donc $g = h$.

Ainsi, pour tout ensemble $G$ et toutes $g : G \to E$ et $h : G \to E$, si $f \circ g = f \circ h$, alors $g = h$.

Donc $\boxed{f \text{ est régulière à gauche}}$.

♦ $(2)$ :

Supposons que $f$ soit inversible à droite. Soit $i$ une inverse à droite de $f$.

Soit $G$ un ensemble. Soient $g : F \to G$ et $h : F \to G$ telles que $g \circ f = h \circ f$.

On a alors $g \underset{98 \text{ p. } 125}{=} g \circ \mathrm{id}_F = g \circ (f \circ i) \underset{58 \text{ p. } 68}{=} (g \circ f) \circ i = (h \circ f) \circ i \underset{58 \text{ p. } 68}{=} h \circ (f \circ i) = h \circ \mathrm{id}_F \underset{98 \text{ p. } 125}{=} h$.

Donc $g = h$.

Ainsi, pour tout ensemble $G$ et toutes $g : F \to G$ et $h : F \to G$, si $g \circ f = h \circ f$, alors $g = h$.

Donc $\boxed{f \text{ est régulière à droite}}$.

♦ $(3)$ :

Supposons que $f$ est inversible.

En particulier, $f$ est inversible à gauche donc $f$ est régulière à gauche d'après $(1)$.

De même, $f$ est inversible à droite donc $f$ est régulière à droite d'après $(2)$.

Ainsi, comme $f$ est régulière à gauche et à droite, $\boxed{f \text{ est régulière}}$.

**CQFD**.

**Remarque** :

On verra la réciproque de cette proposition lorsque l'on abordera la notion d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité.

**Proposition 106 (Régularité et idempotence)**

Soit $E$ un ensemble.

(1) $\mathrm{id}_E$ est la seule application de $E$ dans $E$ qui est à la fois idempotente et régulière à gauche.

(2) $\mathrm{id}_E$ est la seule application de $E$ dans $E$ qui est à la fois idempotente et régulière à droite.

(3) $\mathrm{id}_E$ est la seule application de $E$ dans $E$ qui est à la fois idempotente et régulière.

*Démonstration*

♦ (1) :
Soit $f : E \to E$.
Supposons que $f$ est idempotente et régulière à gauche.
On sait $f$ est idempotente, donc $f \circ f = f \underset{98 \text{ p. } 125}{=} f \circ \mathrm{id}_E$.
Donc $f \circ f = f \circ \mathrm{id}_E$.
Or, $f$ est régulière à gauche.
Donc $\boxed{f = \mathrm{id}_E}$.

♦ (2) :
Soit $f : E \to E$.
Supposons que $f$ est idempotente et régulière à droite.
On sait que $f$ est idempotente, donc $f \circ f = f \underset{98 \text{ p. } 125}{=} \mathrm{id}_E \circ f$.
Donc $f \circ f = \mathrm{id}_E \circ f$.
Or, $f$ est régulière à droite.
Donc $\boxed{f = \mathrm{id}_E}$.

♦ (3) :
Soit $f : E \to E$.
Supposons que $f$ est idempotente et régulière.
En particulier, $f$ est idempotente et régulière à gauche.
Donc $\boxed{f = \mathrm{id}_E}$ d'après $(1)$.
**CQFD**.

**Remarque 4**

La proposition 105 page 134 nous dit qu'inversibilité implique régularité. On peut donc réinterpréter la proposition précédence avec l'inversibilité :

Soit $E$ un ensemble.

$(1)$ $\mathrm{id}_E$ est la seule application de $E$ dans $E$ qui est à la fois idempotente et inversible à gauche.

$(2)$ $\mathrm{id}_E$ est la seule application de $E$ dans $E$ qui est à la fois idempotente et inversible à droite.

$(3)$ $\mathrm{id}_E$ est la seule application de $E$ dans $E$ qui est à la fois idempotente et inversible.

## 2.4 Involution

**Définition 55 (Involution)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $f : E \to E$.

On dit que $f$ est une **involution** si et seulement si $f \circ f = \mathrm{id}_E$, que l'on peut aussi écrire $f^2 = \mathrm{id}_E$. Autrement dit, $\forall x \in E, f(f(x)) = x$.

**Exemple** :
- L'identité sur $E$ est involutive puisque $\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$.
- Le passage au complémentaire d'un ensemble est involutif d'après la prop. 27 p. 35.
- Le passage à la relation complémentaire est involutif d'après la prop. 65 p. 73.
- Le passage au graphe transposé est involutif d'après la prop. 46 p. 56.
- Le passage à la relation transposée est involutif d'après la prop. 61 p. 71.

**Proposition 107 (Inversibilité des involutions)**

Soit $E$ un ensemble. Soit $f : E \to E$.

$f$ est une involution si et seulement si $f$ est inversible et $f^{-1} = f$.

*Démonstration*

Supposons que $f$ est une involution.

Donc $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Donc il existe une application $g : E \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_E = g \circ f$.

Donc $f$ est inversible.

De plus, comme $f \circ f = \mathrm{id}_E$, on a $f^{-1} = f$.

Réciproquement, si $f$ est inversible et $f^{-1} = f$, alors $f \circ f = \mathrm{id}_E$ et donc $f$ est une involution.

**CQFD**.

## Proposition 108 (Propriétés des involutions)

Soient $E$ et $F \neq \emptyset$ deux ensembles. Soient $f : E \to E$, $g : E \to E$ et $h : E \to F$.

(1) Si $f$ et $g$ sont des involutions, alors $\Big($ $g \circ f$ est une involution si et seulement si $f$ et $g$ commutent $\Big)$.

(2) Si $f$ est une involution, alors $\Big($ $g \circ f$ est une involution si et seulement si $g \circ f \circ g = f$ $\Big)$.

(3) Si $f$ est une involution et si $h$ est inversible, alors $h \circ f \circ h^{-1}$ est une involution de $F$.

*Démonstration*

♦ (1) :

Supposons que $f$ et $g$ sont des involutions.

$f$ et $g$ sont donc inversibles et $f^{-1} = f$ et $g^{-1} = g$.

Donc d'après la proposition 102 page 129, $g \circ f$ est inversible et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $g \circ f$ est une involution.

On a donc $(g \circ f)^{-1} = g \circ f$.

On peut donc en déduire les égalités suivantes :

$g \circ f$

$= (g \circ f)^{-1}$ puisque $g \circ f$ est une involution

$= f^{-1} \circ g^{-1}$ d'après la prop. 102 p. 129

$= f \circ g$ puisque $f$ et $g$ sont des involutions

Donc par transitivité, $g \circ f = f \circ g$.

Donc $f$ et $g$ commutent.

Ainsi, si $g \circ f$ est une involution, alors $f$ et $g$ commutent.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ et $g$ commutent.

On a donc $g \circ f = f \circ g$.

On a donc les égalités suivantes :

$(g \circ f)^{-1}$

$= f^{-1} \circ g^{-1}$ d'après la prop. 102 p. 129

$= f \circ g$ puisque $f$ et $g$ sont des involutions

$= g \circ f$ puisque $f$ et $g$ commutent

Donc par transitivité $(g \circ f)^{-1} = g \circ f$.

Donc $g \circ f$ est une involution.

Ainsi, $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont des involutions} \Rightarrow \Big( g \circ f \text{ est une involution} \iff f \text{ et } g \text{ commutent} \Big)}$.

♦ (2) :

Supposons que $f$ est une involution.

En particulier, $f$ est inversible et $f^{-1}$.

Raisonnons par double implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $g \circ f$ est une involution.

En particulier, $g \circ f$ est inversible et $(g \circ f)^{-1} = g \circ f$.

Donc $(g \circ f) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_E$.

Donc $g \circ f \circ g \circ f = \mathrm{id}_E$ puisque la composition est associative.

Donc $g \circ f \circ g \circ f \circ f = \mathrm{id}_E \circ f$.

Donc $g \circ f \circ g \circ f \circ f = f$ par neutralité de l'identité.

Donc $g \circ f \circ g \circ (f \circ f) = f$ puisque la composition est associative.

Donc $g \circ f \circ g \circ \mathrm{id}_E = f$ puisque $f \circ f = \mathrm{id}_E$ puisque $f$ est une involution.

Donc $g \circ f \circ g = f$ par neutralité de l'identité.

Ainsi, si $g \circ f$ est une involution, alors $(g \circ f) \circ g = f$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $g \circ f \circ g = f$.

Donc $g \circ f \circ g \circ f = f \circ f$.

Donc $g \circ f \circ g \circ f = \mathrm{id}_E$ puisque $f \circ f = \mathrm{id}_E$ puisque $f$ est une involution.

Donc $(g \circ f) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_E$ puisque la composition est associative.

Donc $g \circ f$ est une involution.

Ainsi, si $g \circ f \circ g = f$, alors $g \circ f$ est une involution.

Finalement, $\boxed{f \text{ est une involution} \Rightarrow \Big( g \circ f \text{ est une involution } \iff g \circ f \circ g = f \Big)}$

♦ (3) :

Supposons que $f$ est une involution et que $h$ est inversible.

On a alors les égalités suivantes :

$(h \circ f \circ h^{-1}) \circ (h \circ f \circ h^{-1})$

$= h \circ f \circ h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1}$ par associativité de la composition

$= h \circ f \circ (h^{-1} \circ h) \circ f \circ h^{-1}$ par associativité de la composition

$= h \circ f \circ \mathrm{id}_E \circ f \circ h^{-1}$ par définition de $h^{-1}$

$= h \circ f \circ f \circ h^{-1}$ par neutralité de $\mathrm{id}_E$

$= h \circ (f \circ f) \circ h^{-1}$ par associativité de la composition

$= h \circ \mathrm{id}_E \circ h^{-1}$ puisque $f \circ f = \mathrm{id}_E$ puisque $f$ est une involution

$= h \circ h^{-1}$ par neutralité de $\mathrm{id}_E$

$= \mathrm{id}_F$ par définition de $h^{-1}$

Donc $(h \circ f \circ h^{-1}) \circ (h \circ f \circ h^{-1}) = \mathrm{id}_F$.

Donc $h \circ f \circ h^{-1}$ est une involution.

Donc $\boxed{\Big( f \text{ est une involution et } h \text{ est inversible} \Big) \Rightarrow h \circ f \circ h^{-1} \text{ est une involution}}$.

**CQFD**.

# 3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

## 3.1 Injectivité

**Définition 56 (Injectivité)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

• On dit que $f$ est **injective** si et seulement si $\forall x \in E, \forall x' \in E, \Big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\Big)$ ou de manière équivalente, $\forall x \in E, \forall x' \in E, \Big(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\Big)$.

• Ainsi, $f$ est injective si et seulement si tout élément de $F$ est "atteint" au plus une seule fois par $f$.

• On dit aussi que $f$ est une **injection** (de $E$ dans $F$).

• On note parfois $f : E \hookrightarrow F$.

**Exemple** :
• L'identité sur $E$ est injective puisque si $\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x')$, alors $x = \mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') = x'$.
• Si $E = \emptyset$, alors l'unique application $f$ de $E$ dans $F$ (unique d'après la remarque 2 page 116) est injective puisque l'assertion $\forall x \in \emptyset, \forall x' \in \emptyset, \Big(x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')\Big)$ est nécessairement vraie.

**Proposition 109 (Injectivité et régularité à gauche)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$f$ est injective si et seulement si $f$ est régulière à gauche.

*Démonstration*

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f$ est injective.
Soient $G$ un ensemble, $g : G \to E$ et $h : G \to E$ tels que $f \circ g = f \circ h$.

• Si $G = \emptyset$, alors il n'existe qu'une seule application de $G$ dans $E$ d'après la remarque 2 page 116.

En particulier, $g = h$.

• Supposons que $G \neq \emptyset$.

Soit $x \in G$.

On a donc $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$.

Donc $f(g(x)) = f(h(x))$.

Or, $f$ est injective.

Donc $g(x) = h(x)$.

Donc $\forall x \in G, \Big(g(x) = h(x)\Big)$.

Donc $g = h$ d'après la prop. 94 p. 118.

Ainsi, $\forall G, \forall g : G \to E, \forall h : G \to E, \Big(f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h\Big)$.

Donc $f$ est régulière à gauche.

Ainsi, si $f$ est injective, alors $f$ est régulière à gauche.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est régulière à gauche.

Soient $x$ et $x'$ dans $E$ tels que $f(x) = f(x')$.

Posons $G = \{\emptyset\}$.

Soit $g : G \to E$ définie par $g(\emptyset) = x$.

Soit $h : G \to E$ définie par $h(\emptyset) = x'$.

On a donc $(f \circ g)(\emptyset) = f(g(\emptyset)) = f(x) = f(x') = f(h(\emptyset)) = (f \circ h)(\emptyset)$.

Donc $\forall z \in G, \Big((f \circ g)(z) = (f \circ h)(z)\Big)$.

Donc $f \circ g = f \circ h$ d'après la prop. 94 p. 118.

Or, $f$ est régulière à gauche.

Donc $g = h$.

Donc $x = g(\emptyset) = h(\emptyset) = x'$.

Donc $x = x'$.

Donc $\forall x \in E, \forall x' \in E, \Big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\Big)$.

Donc $f$ est injective.

Ainsi, si $f$ est régulière à gauche, alors $f$ est injective.

Finalement, $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } f \text{ est régulière à gauche}}$.

**CQFD**.

## Proposition 110 (Injectivité et inversibilité à gauche)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$f$ est injective si et seulement si $f$ est inversible à gauche.

*Démonstration*

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f$ est injective.

Construisons explicitement une $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Soit $c \in E$.

Soit $y \in F$.

• Si $y \in \mathrm{im}(f)$, l'injectivité de $f$ nous assure que $y$ n'admet qu'un seul antécédent $x_y$ par $f$.
On pose donc $g(y) = x_y$.
• Si $y \notin \mathrm{im}(f)$, alors il suffit de poser $g(y) = c$.

Ainsi, on a posé
$$\begin{array}{rccl} g: & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & \begin{cases} x_y & \text{si } y \in \mathrm{im}(f) \\ c & \text{si } y \notin \mathrm{im}(f) \end{cases} \end{array}$$

Finalement, pour tout $x \in E$, on a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x_{f(x)}$.
Or, $x_{f(x)}$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par $f$, et $x$ aussi, donc $x_{f(x)} = x$.
Donc $(g \circ f)(x) = x$.

Ainsi, $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = x = \mathrm{id}_E(x)$.
Donc $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
Donc $f$ est inversible à gauche.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est inversible à gauche.
Il existe donc $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Soient $x$ et $x'$ dans $E$ tels que $f(x) = f(x')$.

On a alors $g(f(x)) = g(f(x'))$.
On a donc $x = \mathrm{id}_E(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') = \mathrm{id}_E(x') = x'$.
Donc $x = x'$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall x' \in E, \Big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\Big)$.
Donc $f$ est injective.

Finalement, $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } f \text{ est inversible à gauche}}$.
**CQFD**.

Énonçons la version complète de la propriété $(1)$ de la proposition 105 page 134.

## Proposition 111 (Inversibilité à gauche et régularité à gauche)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$f$ est inversible à gauche si et seulement si $f$ est régulière à gauche.

*Démonstration*

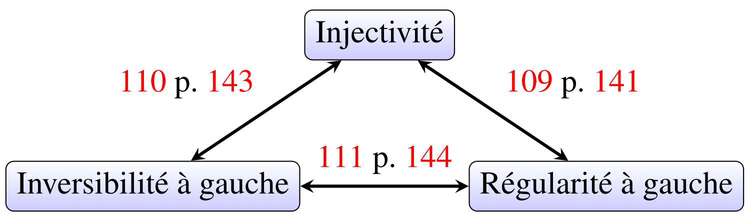
Raisonnons par double implications :
$\boxed{\Rightarrow}$ C'est la proposition 105 page 134.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f$ est régulière à gauche.
Donc $f$ est injective d'après la prop. 109 p. 141.
Donc $f$ est inversible à gauche d'après la prop. 110 p. 143.

Ainsi, si $f$ est régulière à gauche, alors $f$ est inversible à gauche.

Finalement, $\boxed{f \text{ est inversible à gauche si et seulement si } f \text{ est régulière à gauche}}$.
**CQFD**.

On peut schématiser ce que l'on vient de montrer par le graphe suivant, qui nous montre que ces trois notions désignent en fait un même concept :



**Proposition 112 (Injectivité et composition)**

Soient $E$, $F \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$ trois ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

$(1)$ Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

$(2)$ Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective.

*Démonstration*

Nous pourrions utiliser les points $(1)$ et $(2)$ de la proposition 104 page 132.

Nous allons cependant démontrer ces résultats en utilisant directement la définition d'injectivité.

♦ $(1)$ :

• Supposons que $E = \emptyset$.

Dans ce cas là, il n'y a qu'une seule application de $E$ dans $G$ d'après la remarque 2 page 116.

C'est donc $g \circ f$.

De plus, on a vu dans les exemples d'applications injectives que cette unique application était injective.

Donc $g \circ f$ est injective.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont injectives, alors } g \circ f \text{ est injective}}$.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

Supposons $f$ et $g$ sont injectives.

Soient $x$ et $x'$ dans $E$.

Supposons que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

Donc $g(f(x)) = g(f(x'))$ d'après la prop. 97 p. 124.

Or, $g$ est injective.

Donc $f(x) = f(x')$.

Or, $f$ est injective.

Donc $x = x'$.

Donc si $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, alors $x = x'$.

Donc $\forall x \in E, \forall x' \in E, \Big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x'\Big)$.

Donc $g \circ f$ est injective.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont injectives, alors } g \circ f \text{ est injective}}$.

♦ (2) :

• Supposons que $E = \emptyset$.

Dans ce cas là, il n'y a qu'une seule application de $E$ dans $F$ d'après la remarque 2 page 116.

C'est donc $f$.

De plus, on a vu dans les exemples d'applications injectives que cette unique application était injective.

Donc $f$ est injective.

Donc $\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est injective, alors } f \text{ est injective}}$.

• Supposons que $E \neq \emptyset$.

Supposons que $g \circ f$ est injective.

Soient $x$ et $x'$ dans $E$.

Supposons que $f(x) = f(x')$.

Donc $g(f(x)) = g(f(x'))$.

Donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ d'après la prop. 97 p. 124.

Or, $g \circ f$ est injective.

Donc $x = x'$.

Donc si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.

Donc $\forall x \in E, \forall x' \in E, \Big(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\Big)$.

Donc $f$ est injective.

Donc $\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est injective, alors } f \text{ est injective}}$.

**CQFD**.

## 3.2 Surjectivité

**Définition 57 (Surjectivité)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

• On dit que $f$ est **surjective** si et seulement si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$, ou de manière équivalente $\mathrm{im}(f) = F$.

• Ainsi, $f$ est surjective si et seulement si tout élément de $F$ est "atteint" au moins une fois par $f$, c'est-à-dire que tout élément de $F$ admet au moins un antécédent par $f$.

• On dit aussi que $f$ est une **surjection**.

• On note parfois $f : E \twoheadrightarrow F$.

**Exemple** :

• L'identité sur $E$ est surjective puisque pour tout $x \in E$, $x$ est son propre antécédent.

• L'unique application de $\emptyset$ dans $\emptyset$ (unique d'après la remarque 2 page 116) est surjective puisque l'assertion $\forall y \in \emptyset, \exists x \in \emptyset, y = f(x)$ est nécessairement vraie.

**Proposition 113 (Surjectivité et régularité à droite)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$f$ est surjective si et seulement si $f$ est régulière à droite.

*Démonstration*

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f$ est surjective.

Soient $G$ un ensemble, $g : F \to G$ et $h : F \to G$.

Supposons que $g \circ f = h \circ f$.

Soit $y \in F$.

On sait que $f$ est surjective.

Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Par hypothèse, on a $g \circ f = h \circ f$.

Donc en particulier $(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x)$.

Donc $g(f(x)) = h(f(x))$.

Donc $g(y) = h(y)$.

Donc $\forall y \in F, g(y) = h(y)$.

Donc $g = h$.

Donc si $g \circ f = h \circ f$, alors $g = h$.

Donc $\forall G, \forall g : F \to G, \forall h : F \to G, \Big(g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h\Big)$.

Donc $f$ est régulière à droite.

Donc si $f$ est surjective, alors $f$ est régulière à droite.

$\boxed{\Leftarrow}$

Raisonnons par contraposition.

Supposons que $f$ n'est pas surjective.

Il existe donc $y_0 \in F$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) \neq y_0$.

Posons $a = \emptyset$ et $b = \{\emptyset\}$ de sorte à avoir $a \neq b$. Posons $G = \{a; b\}$.

Posons $\begin{array}{rccc} g : & F & \longrightarrow & G \\ & y & \longmapsto & a \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} h : & F & \longrightarrow & G \\ & y & \longmapsto & \begin{cases} a & \text{si } y \neq y_0 \\ b & \text{si } y = y_0 \end{cases} \end{array}$

Comme $g(y_0) = a$ et $h(y_0) = b$, on a $g(y_0) \neq h(y_0)$.

Donc $\exists y \in F, g(y) \neq h(y)$.

Donc $g \neq h$ d'après la prop. 94 p. 118.

Cependant, pour tout $y \in F$, si $y \neq y_0$, alors $g(y) = a = h(y)$.

Or, pour tout $x \in E$, $f(x) \neq y_0$.

Donc pour tout $x \in E$, $g(f(x)) = h(f(x))$.

Donc pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = (h \circ f)(x)$.

Donc $g \circ f = h \circ f$ d'après la prop. 94 p. 118.

On a donc $g \circ f = h \circ f$ et $g \neq h$.

Donc $f$ n'est pas régulière à droite.

Ainsi, si $f$ n'est pas surjective, alors $f$ n'est pas régulière à droite.

Donc par contraposition, si $f$ est régulière à droite, alors $f$ est surjective.

Finalement, $\boxed{f \text{ est surjective si et seulement si } f \text{ est régulière à droite}}$.

**CQFD**.

## Proposition 114 (Surjectivité et inversibilité à droite)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$f$ est surjective si et seulement si $f$ est inversible à droite

*Démonstration*

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f$ est surjective.

Construisons $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Soit $y \in F$.

Comme $f$ est surjective, on sait qu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Donc l'ensemble $E_y := \{x \in E \mid f(x) = y\}$ est non vide.

Ainsi, $E_y$ est une partie de $E$, si bien que $E_y \in \mathcal{P}(E)$.

On peut donc considérer $X := \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \exists y \in F, A = E_y\}$.

Comme on vient de le dire, $f$ est surjective, si bien que $\emptyset \notin X$ et donc $X - \{\emptyset\} = X$.

Donc **d'après l'axiome du choix**, il existe une application $h : X \to \bigcup X$
telle que $\forall A \in X, h(A) \in A$.

Ainsi, pour tout $A \in X$, on a $A \subseteq E$ donc comme $h(A) \in A$, on a $h(A) \in E$.

Donc pour tout $y \in F$, comme $E_y$, on a $h(E_y) \in E$.

Posons $\begin{array}{rccc} g : & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & h(E_y) \end{array}$ et montrons que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Soit $y \in F$.

On a $h(E_y) \in E_y$ par définition de $h$.

Or, $E_y = \{x \in E \mid f(x) = y\}$ par définition de $E_y$.

Donc $f(h(E_y)) = y$.

Or, $g(y) = h(E_y)$ par définition de $g$.

Donc $f(g(y)) = y$.

Donc $(f \circ g)(y) = y$ d'après la prop. 97 p. 124.

Donc $(f \circ g)(y) = \mathrm{id}_F(y)$.

Ainsi, $\forall y \in F, (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_F(y)$.

Donc $f \circ g = \mathrm{id}_F$ d'après la prop. 94 p. 118.

Donc $f$ est inversible à droite.

Donc si $f$ est surjective, alors $f$ est inversible à droite.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est inversible à droite.

Il existe donc $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Soit $y \in F$.

Posons $x_0 = g(y)$.

On a alors $f(x_0) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$.

Donc $\exists x \in E, f(x) = y$.

Donc $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$.

Donc $f$ est surjective.

Donc si $f$ est inversible à droite, alors $f$ est surjective.

Finalement, $\boxed{f \text{ est surjective si et seulement si } f \text{ est inversible à droite}}$.

**CQFD**.

**Remarque** :

Énonçons la version complète de la propriété $(2)$ de la proposition 105 page 134.

## Proposition 115 (Inversibilité à droite et régularité à droite)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$f$ est inversible à droite si et seulement si $f$ est régulière à droite.

*Démonstration*

$\boxed{\Rightarrow}$ C'est la proposition 105 page 134.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f$ est régulière à droite.

Donc $f$ est surjective d'après la prop. 113 p. 147.

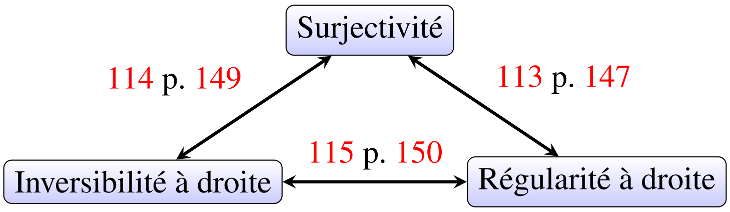
Donc $f$ est inversible à droite d'après la prop. 114 p. 149.

Ainsi, si $f$ est régulière à droite, alors $f$ est inversible à droite.

Finalement, $\boxed{f \text{ est inversible à droite si et seulement si } f \text{ est régulière à droite}}$.

**CQFD**.

On peut schématiser ce que l'on vient de montrer par le graphe suivant, qui nous montre que ces trois notions désignent en fait un même concept :




## Proposition 116 (Surjectivité et composition)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

(1) Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

(2) Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective.

### Démonstration

Nous pourrions utiliser le fait que surjectivité et inversibilité à droite désignent la même notion, puis utiliser la proposition 104 page 132 pour terminer la proposition.

Nous allons cependant démontrer la proposition directement sans passer par l'inversibilité à droite.

(1) Supposons que $f$ et $g$ sont surjectives.

Soit $z \in G$.

Comme $g$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.

Comme $f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Donc $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Donc $\forall z \in G, \exists x \in E, (g \circ f)(x) = z$.

Donc $g \circ f$ est surjective.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ et } g \text{ sont surjectives, alors } g \circ f \text{ est surjective}}$.

(2) Supposons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $z \in G$.

Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$.

Posons $y = f(x)$.

On a alors $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$.

Donc il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.

Donc $\forall z \in G, \exists y \in F, g(y) = z$.

Donc $g$ est surjective.

Donc $\boxed{\text{si } g \circ f \text{ est surjective, alors } g \text{ est surjective}}$.

**CQFD**.

## Proposition 117 (Injectivité, surjectivité et composition)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

(1) Si $f$ est surjective et $g \circ f$ est injective, alors $g$ est injective.

(2) Si $g$ est injective et $g \circ f$ est surjective, alors $f$ est surjective.

*Démonstration*

**Première preuve : avec les inversibilités**

(1) Supposons que $f$ est surjective et que $g \circ f$ est injective.

Alors $f$ est inversible à droite d'après la prop. 114 p. 149 et $g \circ f$ est inversible à gauche d'après la prop. 110 p. 143.

Donc $g$ est inversible à gauche d'après la prop. 104 p. 132.

Donc $\boxed{g \text{ est injective}}$ d'après la prop. 110 p. 143.

(2) Supposons que $g$ est injective et que $g \circ f$ est surjective.

Alors $g$ est inversible à gauche d'après la prop. 110 p. 143 et $g \circ f$ est inversible à droite d'après la prop. 114 p. 149.

Donc $f$ est inversible à droite d'après la prop. 104 p. 132.

Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$ d'après la prop. 114 p. 149.

**Deuxième preuve : directement**

(1) Supposons que $f$ est surjective et que $g \circ f$ est injective.

Soient $y$ et $y'$ dans $F$.

Supposons que $g(y) = g(y')$.

Comme $f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Comme $f$ est surjective, il existe $x' \in E$ tel que $f(x') = y'$.

Donc $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = g(y') = g(f(x')) = (g \circ f)(x')$.

Donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

Or, $g \circ f$ est injective.

Donc $x = x'$.

Donc $y = f(x) = f(x') = y'$.

Donc $y = y'$.

Donc si $g(y) = g(y')$, alors $y = y'$.

Donc $\forall y \in F, \forall y' \in F, \Big(g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'\Big)$.

Donc $\boxed{g \text{ est injective}}$.

(2) Supposons que $g$ est injective et $g \circ f$ est surjective.

Soit $y \in F$.

Posons $z = g(y)$.

Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x_0 \in E$ tel que $(g \circ f)(x_0) = z$.

Donc $z = g(y)$ et $z = g(f(x_0))$.

Or, $g$ est injective.

Donc $y = f(x_0)$.

Donc $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

**CQFD**.

## Proposition 118 (Image d'une composition et surjectivité)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Alors $f$ est surjective si et seulement si pour tout ensemble $G$ non vide et toute application $g : F \to G$, on a $\text{im}(g \circ f) = \text{im}(g)$.

*Démonstration*

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f$ soit surjective.

Soient $G$ un ensemble non vide, et soit $g : F \to G$.

On sait déjà que $\text{im}(g \circ f) \subseteq \text{im}(g)$ d'après la prop. 99 p. 126.

Il nous reste donc à démontrer l'inclusion réciproque.

Soit $z \in G$.

Supposons que $z \in \text{im}(g)$.

Il existe donc $y \in F$ tel que $z = g(y)$.

Or, $f$ est surjective.

Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Donc $z = g(y) = g(f(x)) \underset{97 \text{ p. } 124}{=} (g \circ f)(x)$.

Donc $z = (g \circ f)(x)$.

Donc $z \in \text{im}(g \circ f)$.

Donc si $z \in \text{im}(g)$, alors $z \in \text{im}(g \circ f)$.

Donc $\forall z \in G, \Big(z \in \text{im}(g) \Rightarrow z \in \text{im}(g \circ f)\Big)$.

Donc $\text{im}(g) \subseteq \text{im}(g \circ f)$.

Finalement, $\text{im}(g \circ f) = \text{im}(g)$.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ est surjective, alors } \forall G, \forall g : F \to G, \text{im}(g \circ f) = \text{im}(g)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que pour tout ensemble $G$ et toute application $g : F \to G$, on a $\text{im}(g \circ f) = \text{im}(g)$.

En particulier, c'est valable pour $G = F$ et $g = \text{id}F$.

On a donc $\text{im}(f) = \text{im}(\text{id}_F \circ f) = \text{im}(\text{id}_F) = F$.

Donc $\text{im}(f) = F$.

Donc $f$ est surjective.

Donc $\boxed{\text{si } \forall G, \forall g : F \to G, \text{im}(g \circ f) = \text{im}(g), \text{ alors } f \text{ est surjective}}$.

**CQFD**.

## 3.3 Bijectivité

**Définition 58 (Bijectivité)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

• On dit que $f$ est **bijective** si et seulement si $f$ est injective et surjective, c'est-à-dire $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.

• Autrement dit, $f$ est bijective si et seulement si tout élément de $F$ admet un unique antécédent par $f$.

• On dit aussi que $f$ est une **bijection** (de $E$ dans $F$).

• On note parfois $f : E \xrightarrow{\sim} F$.

• On notera $\mathcal{B}\text{ij}(E \to F)$ ou encore $\mathfrak{S}(E \to F)$ l'ensemble des bijections de $E$ dans $F$.
Ainsi, $\mathcal{B}\text{ij}(E \to F) = \{f : E \to F \mid f \text{ est une bijection }\}$.

• On notera parfois $\mathcal{B}\text{ij}(E)$ plutôt que $\mathcal{B}\text{ij}(E \to E)$, et $\mathfrak{S}(E)$ plutôt que $\mathfrak{S}(E \to E)$.
Les bijections de $E$ dans $E$ seront parfois appelées des **permutations** de $E$.

**Définition 59 (Ensembles équipotents)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
On dit que $E$ et $F$ sont **équipotents** si et seulement s'il existe une bijection $f : E \to F$.
On note alors $E \simeq F$.

**Proposition 119 (Bijectivité et régularité)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$f$ est bijective si et seulement si $f$ est régulière.

*Démonstration*

On a les équivalences suivantes :

$f$ est bijective

$\iff$ $f$ est injective et surjective

$\underset{109 \text{ p. } 141}{\iff}$ $f$ est régulière à gauche et surjective
$\underset{113 \text{ p. } 147}{\iff}$ $f$ est régulière à gauche et à droite
$\iff$ $f$ est régulière
**CQFD**.

## Proposition 120 (Bijectivité et inversibilité)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$f$ est bijective si et seulement si $f$ est inversible.
Cette proposition justifie l'autre nom de $f^{-1}$ : la **bijection réciproque** de $f$.

*Démonstration*

On a les équivalences suivantes :
$f$ est bijective
$\iff$ $f$ est injective et surjective
$\underset{110 \text{ p. } 143}{\iff}$ $f$ est inversible à gauche et surjective
$\underset{114 \text{ p. } 149}{\iff}$ $f$ est inversible à gauche et à droite
$\iff$ $f$ est inversible
**CQFD**.

**Remarque** :
Énonçons la version complète de la propriété $(3)$ de la proposition 105 page 134.

## Proposition 121 (Inversibilité et régularité)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$f$ est inversible si et seulement si $f$ est régulière.

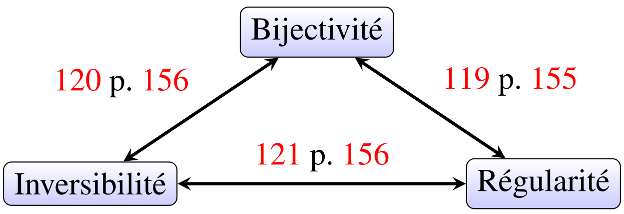
*Démonstration*

$\boxed{\Rightarrow}$ C'est la proposition 105 page 134.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f$ est régulière.
Donc $f$ est bijective d'après la prop. 119 p. 155.

Donc $f$ est inversible d'après la prop. 120 p. 156.
**CQFD**.

On peut schématiser ce que l'on vient de montrer par le graphe suivant, qui nous montre que ces trois notions désignent en fait un même concept :




## Proposition 122 (Bijectivité et composition)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

(1) Si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.
(2) Si $g \circ f$ est bijective, alors $f$ est injective et $g$ est surjective.

*Démonstration*

**Première démonstration : Injectivité et surjectivité**

(1) Supposons que $f$ et $g$ sont bijectives.
Donc $f$ et $g$ sont injectives donc $g \circ f$ est injective d'après la prop. 112 p. 145.
De même, $f$ et $g$ sont surjectives donc $g \circ f$ est surjective d'après la prop. 116 p. 151.
Comme $g \circ f$ est injective et surjective, $\boxed{g \circ f \text{ est bijective}}$.

(2) Supposons que $g \circ f$ est bijective.
En particulier, $g \circ f$ est injective donc $\boxed{f \text{ est injective}}$ d'après la prop. 112 p. 145.
De même, $g \circ f$ est surjective donc $\boxed{g \text{ est surjective}}$ d'après la prop. 116 p. 151.

**Deuxième démonstration : Inversibilités**

(1) Supposons que $f$ et $g$ sont bijectives.
Donc $f$ et $g$ sont inversibles d'après la prop. 120 p. 156.
Donc $g \circ f$ est inversible d'après la prop. 102 p. 129.
Donc $\boxed{g \circ f \text{ est bijective}}$ d'après la prop. 120 p. 156.

(2) Supposons que $g \circ f$ est bijective.

Donc $g \circ f$ est inversible d'après la prop. 120 p. 156.

En particulier, $g \circ f$ est inversible à gauche donc $f$ est inversible à gauche d'après la prop. 104 p. 132.

Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$ d'après la prop. 110 p. 143.

De même, $g \circ f$ est inversible à droite donc $g$ est inversible à droite d'après la prop. 104 p. 132.

Donc $\boxed{g \text{ est surjective}}$ d'après la prop. 114 p. 149.

**CQFD**.

## Proposition 123 (Bijection réciproque et graphe)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides tels que $\mathcal{B}\mathrm{ij}(E \to F) \neq \emptyset$.

Soit $f : E \to F$ une bijection. Soit $\Gamma$ un graphe de $E$ dans $F$.

(1) Pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a l'équivalence $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.

(2) Si $\Gamma$ est le graphe de $f$, alors ${}^t\Gamma$ est le graphe de $f^{-1}$.

*Démonstration*

♦ (1) Soient $x \in E$ et $y \in F$.

Raisonnons par doubles implications :

> Supposons que $y = f(x)$.
> On a alors $x = \mathrm{id}_E(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\Big(f(x)\Big) = f^{-1}(y)$.
> Donc $x = f^{-1}(y)$.

Donc $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$.

> Supposons que $x = f^{-1}(y)$.
> On a alors $y = \mathrm{id}_F(y) = (f \circ f^{-1})(y) = f\Big(f^{-1}(y)\Big) = f(x)$.
> Donc $y = f(x)$.

Donc $x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f(x)$.

Finalement, $\boxed{y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)}$.

♦ (2) Commençons par remarquer que comme $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$, ${}^t\Gamma$ est bien un graphe de $F$ dans $E$. Supposons que $\Gamma$ est le graphe de $f$.

Il nous reste donc à prouver que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$,

on a l'équivalence $x = f^{-1}(y) \iff (y; x) \in {}^t\Gamma$.

Soient $x \in E$ et $y \in F$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & x = f^{-1}(y) \\ \underset{(1)}{\iff} \ & f(x) = y \\ \iff \ & (x;y) \in \Gamma \text{ car } \Gamma \text{ est le graphe de } f \\ \iff \ & (y;x) \in {}^t\Gamma \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence $\boxed{x = f^{-1}(y) \iff (y;x) \in {}^t\Gamma}$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on peut dire que ${}^t\Gamma$ est le graphe de $f^{-1}$.

**CQFD**.

# 4 Images

## 4.1 Image direct

### Définition 60 (Image directe d'une partie)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $f : E \to F$. Soit $A$ une partie de $E$.

• On appelle **image directe** de $A$ par $f$ la partie de $F$ définie par $\{y \in F \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$.
On la note $f^{\rightarrow}(A)$.

• On défini ainsi une nouvelle application $\begin{array}{rccc} f^{\rightarrow} : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ & A & \longmapsto & f^{\rightarrow}(A) \end{array}$

### Remarque 5

• On remarque que $f^{\rightarrow}(E) = \mathrm{im}(f)$.

• La plupart des auteurs notent cela $f(A)$ plutôt que $f^{\rightarrow}(A)$.
On évitera cela à cause de la confusion que cela peut provoquer : si l'on considère l'applicaton $f : \{\emptyset\} \to \{1\}$, alors que veut dire $f(\emptyset)$ ? Cela peut être $1$ si l'on considère l'image de $\emptyset$ en tant qu'antécédent, ou cela peut être $\emptyset$ si l'on considère l'image direct de $\emptyset$ en tant que partie de $\{\emptyset\}$.

### Proposition 124 (Image directe de l'identité)

Soit $E$ un ensemble non vide.
Pour toute partie $A$ de $E$, on a $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A) = A$.
Autrement dit, on a $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

*Démonstration*

Soit $A$ une partie de $E$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A)$.

Il existe donc $a \in A$ tel que $x = \mathrm{id}_E(a)$.

Or, $\mathrm{id}_E(a) = a$ par définition de l'identité.

Donc $x = a$.

Donc $x \in A$.

Donc si $x \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A)$, alors $x \in A$.

Supposons que $x \in A$.

Alors comme $x = \mathrm{id}_E(x)$, on a $x \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A)$.

Donc si $x \in A$, alors $x \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A)$.

Ainsi, $x \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A)$ si et seulement si $x \in A$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut dire que $\boxed{\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A) = A}$.

**CQFD**.

## Proposition 125 (Image directe et vide)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$.

(1) $f^{\rightarrow}(\emptyset) = \emptyset$

(2) $\forall A \subseteq E, \Big(f^{\rightarrow}(A) = \emptyset \iff A = \emptyset\Big)$.

*Démonstration*

(1) On sait par définition de $f^{\rightarrow}(\emptyset)$ que $\forall y \in F, \Big(y \in f^{\rightarrow}(\emptyset) \iff \exists x \in \emptyset, y = f(x)\Big)$.

Or, on sait que $\forall y \in F, \neg\Big(\exists x \in \emptyset, y = f(x)\Big)$.

Donc $\forall y \in F, y \notin f^{\rightarrow}(\emptyset)$.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}(\emptyset) = \emptyset}$.

(2) Soit $A \subseteq E$. Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Raisonnons par contraposition.

Supposons que $A \neq \emptyset$.

Il existe donc $a \in A$.

Donc $f(a) \in f^{\rightarrow}(A)$.

Donc $\exists y \in f^{\rightarrow}(A)$.

Donc $\neg\Big(\forall y, y \notin f^{\rightarrow}(A)\Big)$.

Donc $f^{\rightarrow}(A) \neq \emptyset$.

Ainsi, $A \neq \emptyset \Rightarrow f^{\rightarrow}(A) \neq \emptyset$.

Donc $f^{\rightarrow}(A) = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$ par contraposition.

$\boxed{\Leftarrow}$ C'est tout simplement la proposition $(1)$.

Finalement, $f^{\rightarrow}(A) = \emptyset \iff A = \emptyset$.

Ceci étant vrai pour toute $A \subseteq E$, on obtient

$\boxed{\forall A \subseteq E, \Big(f^{\rightarrow}(A) = \emptyset \iff A = \emptyset\Big)}$.

**CQFD**.

## Proposition 126 (Image directe d'un singleton et d'une paire)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soient $a$ et $b$ dans $E$.

$(1)$ On a $f^{\rightarrow}\Big(\{a; b\}\Big) = \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.

$(2)$ On a $f^{\rightarrow}\Big(\{a\}\Big) = \Big\{f(a)\Big\}$.

*Démonstration*

$(1)$ Soit $y \in F$.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}\Big(\{a; b\}\Big)$.

Il existe donc $x \in \{a; b\}$ tel que $y = f(x)$.

Comme $x \in \{a; b\}$, on $x = a$ ou $x = b$.

Or, si $x = a$, alors $y = f(a)$.

De même, si $x = b$, alors $y = f(b)$.

Donc $y = f(a)$ ou $y = f(b)$.

Donc $y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}\Big(\{a; b\}\Big) \Rightarrow y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.
Donc $y = f(a)$ ou $y = f(b)$.
Il existe donc $x \in \{a; b\}$ tel que $y = f(x)$.
Donc $y \in f^{\rightarrow}\Big(\{a; b\}\Big)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}\Big(\{a; b\}\Big) \Leftarrow y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.
Ainsi, $y \in f^{\rightarrow}\Big(\{a; b\}\Big) \Leftrightarrow y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on obtient $\boxed{f^{\rightarrow}\Big(\{a; b\}\Big) = \Big\{f(a); f(b)\Big\}}$.

♦ (2) On utilise (1) :
$f^{\rightarrow}\Big(\{a\}\Big) = f^{\rightarrow}\Big(\{a; a\}\Big) \underset{(1)}{=} \Big\{f(a); f(a)\Big\} = \Big\{f(a)\Big\}$.
Donc $\boxed{f^{\rightarrow}\Big(\{a\}\Big) = \Big\{f(a)\Big\}}$.
**CQFD**.

## Proposition 127 (Croissance de l'image directe)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.
Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

(1) Si $A \subseteq B$, alors $f^{\rightarrow}(A) \subseteq f^{\rightarrow}(B)$.
On dit que $f^{\rightarrow}$ est **croissante** (pour l'inclusion).

(2) En particulier, $f^{\rightarrow}(A) \subseteq \mathrm{im}(f)$.

*Démonstration*

♦ (1)
Supposons que $A \subseteq B$.

• Si $A = \emptyset$, alors $f^{\rightarrow}(A) = \emptyset$ d'après la prop. 125 p. 160.
Dans ce cas là, comme on a forcément $\emptyset \subseteq f^{\rightarrow}(B)$ d'après la prop. 7 p. 8.
Donc on a $\boxed{f^{\rightarrow}(A) \subseteq f^{\rightarrow}(B)}$.

• Supposons que $A \neq \emptyset$.
On a donc $f^{\rightarrow}(A) \neq \emptyset$ d'après la prop. 125 p. 160.
Soit $y \in f^{\rightarrow}(A)$.
Il existe donc $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Or, on a $A \subseteq B$ donc $x \in B$.

Donc il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(B)$.

Donc $\forall y \in f^{\rightarrow}(A), y \in f^{\rightarrow}(B)$.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}(A) \subseteq f^{\rightarrow}(B)}$.

♦ (2)

On a par définition $A \subseteq E$.

Donc on a $f^{\rightarrow}(A) \subseteq f^{\rightarrow}(E)$ d'après $(1)$.

Or, on a $f^{\rightarrow}(E) = \text{im}(f)$.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}(A) \subseteq \text{im}(f)}$.

**CQFD**.

## Proposition 128 (Image directe, union et intersection)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$.

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

(1) $f^{\rightarrow}(A \cup B) = f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.

(2) $f^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

(3) $\Big(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C \cap D) = f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)\Big) \iff f$ est injective.

*Démonstration*

♦ (1)

• Soit $y \in F$. Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $y \in f^{\rightarrow}(A \cup B)$.

Il existe donc $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

On a donc $x \in A$ ou $x \in B$.

Si $x \in A$, alors comme $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(A)$.

Si $x \in B$, alors comme $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(B)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A)$ ou $y \in f^{\rightarrow}(B)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A \cup B) \Rightarrow y \in f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $y \in f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A)$ ou $y \in f^{\rightarrow}(B)$.

Si $y \in f^{\rightarrow}(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Mais on sait que $A \subseteq A \cup B$ d'après la prop. 16 p. 16.

Donc $x \in A \cup B$.

Donc il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

Si $y \in f^{\rightarrow}(B)$, alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$.

Mais on sait que $B \subseteq A \cup B$ d'après la prop. 16 p. 16.

Donc $x \in A \cup B$.

Donc il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

Dans les deux cas, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A \cup B)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A \cup B) \Leftarrow y \in f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.

Ainsi donc, $y \in f^{\rightarrow}(A \cup B) \iff y \in f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, nous pouvons affirmer que $\boxed{f^{\rightarrow}(A \cup B) = f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)}$.

♦ (2)

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}(A \cap B)$.

Il existe donc $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.

Comme $x \in A \cap B$, on a $x \in A$ et $x \in B$.

Comme $x \in A$ et $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(A)$.

Comme $x \in B$ et $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(B)$.

Comme $y \in f^{\rightarrow}(A)$ et $y \in f^{\rightarrow}(B)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

Ainsi, $y \in f^{\rightarrow}(A \cap B) \Rightarrow y \in f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut affirmer que $\boxed{f^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)}$.

♦ (3)

La propriété (2) nous permet de réduire le problème à l'équivalence suivante :

« $\left(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C \cap D) \supseteq f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)\right) \iff f$ est injective ».

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, , f^{\rightarrow}(C \cap D) \supseteq f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)$.

Montrons qu'alors $f$ est injective.

Soient $a$ et $b$ dans $E$.

Supposons que $f(a) = f(b)$.
En particulier, on a $\{f(a)\} = \{f(b)\}$.

Posons $C = \{a\}$ et $D = \{b\}$.
Par hypothèse, on a $f^{\to}(C \cap D) \supseteq f^{\to}(C) \cap f^{\to}(D)$.
On a donc $f^{\to}\big(\{a\} \cap \{b\}\big) \supseteq f^{\to}\big(\{a\}\big) \cap f^{\to}\big(\{b\}\big)$.

Or, on a $f^{\to}\big(\{a\}\big) = \{f(a)\}$ et $f^{\to}\big(\{b\}\big) = \{f(b)\}$ d'après la prop. 126 p. 161.
Donc $f^{\to}\big(\{a\} \cap \{b\}\big) \supseteq \{f(a)\} \cap \{f(b)\}$.
Or, on a dit que $\{f(a)\} = \{f(b)\}$.
Donc $\{f(a)\} \cap \{f(b)\} = \{f(a)\} \cap \{f(a)\} = \{f(a)\}$.
Donc $f^{\to}\big(\{a\} \cap \{b\}\big) \supseteq \{f(a)\}$.

En particulier, comme $f(a) \in \{f(a)\}$, on a $f(a) \in f^{\to}\big(\{a\} \cap \{b\}\big)$.
Donc $f^{\to}\big(\{a\} \cap \{b\}\big) \neq \emptyset$.
Donc $\{a\} \cap \{b\} \neq \emptyset$ d'après la prop. 125 p. 160.

Donc il existe $x \in \{a\} \cap \{b\}$.
Donc $x \in \{a\}$ et $x \in \{b\}$.
Comme $x \in \{a\}$, on a $x = a$.
Comme $x \in \{b\}$, on a $x = b$.
Donc $a = x$ et $x = b$.
Donc $a = b$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.
Donc $\forall a \in E, \forall b \in E, \big(f(a) = f(b) \Rightarrow a = b\big)$.
Donc $f$ est injective.
Donc si $\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\to}(C \cap D) \supseteq f^{\to}(C) \cap f^{\to}(D)$, alors $f$ est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est injective.
Soient $C$ et $D$ deux parties de $E$.
Soit $y \in F$.
Supposons que $y \in f^{\to}(C) \cap f^{\to}(D)$.
Donc $y \in f^{\to}(C)$ et $y \in f^{\to}(D)$.
Donc il existe $c \in C$ et $d \in D$ tels que $f(c) = y = f(d)$.

En particulier, on a $f(c) = f(d)$.

Mais $f$ est injective par hypothèse.

Donc $c = d$.

En particulier, $c \in C$ et $c \in D$.

Donc $c \in C \cap D$.

Donc comme $y = f(c)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(C \cap D)$.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)$, alors $y \in f^{\rightarrow}(C \cap D)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on a $f^{\rightarrow}(C \cap D) \supseteq f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)$.

Ceci étant vrai pour toutes parties $C$ et $D$ de $E$, on en déduit :

$\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C \cap D) \supseteq f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)$.

Donc si $f$ est injective, alors $\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C \cap D) \supseteq f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)$.

Ainsi, on a prouvé que

$\Big(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C \cap D) \supseteq f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)\Big) \iff f$ est injective.

Finalement, on a donc bien prouvé que

$\boxed{\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C \cap D) = f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)\Big) \iff f \text{ est injective}}$.

**CQFD**.

## Proposition 129 (Image directe et complémentaire)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

(1) $\Big(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)\Big) \iff f$ est injective

(2) $\Big(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)\Big) \iff f$ est surjective

(3) $\Big(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) = \complement_F f^{\rightarrow}(A)\Big) \iff f$ est bijective

(4) Pour toute partie $A$ de $E$, on a $\Big(f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \iff f^{\rightarrow}(A) = \operatorname{im}(f)\Big)$.

*Démonstration*

♦ (1) Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Montrons que $f$ est injective.

Soient $a$ et $b$ dans $E$.

Supposons que $a \neq b$.

Posons $A = \{a\}$.

Comme $b \neq a$, on a $b \notin A$.

Donc $b \in \complement_E A$ puisque $b \in E$.

Donc $f(b) \in f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right)$.

Or, on a $f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$ par hypothèse.

Donc $f(b) \in \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Donc $f(b) \notin f^{\rightarrow}(A)$.

Cependant, $f^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}\Big(\{a\}\Big) \underset{126 \text{ p. } 161}{=} \Big\{f(a)\Big\}$.

Donc $f(b) \notin \Big\{f(a)\Big\}$.

Donc $f(b) \neq f(a)$.

Donc si $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$.

Donc par contraposition, si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Ceci étant vrai pour tout $a$ et $b$ de $E$, on peut affirmer que $f$ est injective.

Donc si $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$, alors $f$ est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f$ est injective.

Montrons que $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Soit $A \subseteq E$.

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right)$.

Donc il existe $x \in \complement_E A$ tel que $y = f(x)$.

Supposons par l'absurde que $y \in f^{\rightarrow}(A)$.

Il existe donc $a \in A$ tel que $y = f(a)$.

Or, $y = f(x)$.

Donc $f(x) = f(a)$.

Or, $f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = a$.

Donc $x \in A$.

C'est absurde puisque $x \in \complement_E A$ par définition.

Donc $y \notin f^{\rightarrow}(A)$.

Donc comme $y \in F$, on a $y \in \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right)$, alors $y \in \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut affirmer que $f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Ceci étant vrai pour tout $A \subseteq E$, on peut affirmer que $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Donc si $f$ est injective, alors $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Ainsi, $\boxed{\left(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)\right) \iff f \text{ est injective}}$.

♦ $(2)$ Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

En particulier, en prenant $A = E$, on a $f^{\rightarrow}\left(\complement_E E\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(E)$.

Or, on a $\complement_E E = \emptyset$ d'après la prop. 27 p. 35.

Donc $f^{\rightarrow}(\emptyset) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(E)$.

Or, $f^{\rightarrow}(\emptyset) = \emptyset$ d'après la prop. 125 p. 160.

Donc $\emptyset \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(E)$.

Donc $\complement_F f^{\rightarrow}(E) = \emptyset$ d'après la prop. 7 p. 8.

Donc $F \subseteq f^{\rightarrow}(E)$ d'après la prop. 27 p. 35.

Or, $f^{\rightarrow}(E) \subseteq F$ par définition de $f^{\rightarrow}(E)$.

Donc $f^{\rightarrow}(E) = F$.

Or, $f^{\rightarrow}(E) = \mathrm{im}(f)$.

Donc $\mathrm{im}(f) = F$.

Donc $f$ est surjective.

Donc si $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$, alors $f$ est surjective.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f$ est surjective.

Montrons que $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Soit $A \subseteq E$.

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Comme $f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Supposons par l'absurde que $x \in A$.

Comme $y = f(x)$, on aurait $y \in f^{\rightarrow}(A)$.

C'est absurde puisque $y \in \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Donc $x \notin A$.

Or, $x \in E$.

Donc $x \in \complement_E A$.

Or, $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right)$.

Donc si $y \in \complement_F f^{\rightarrow}(A)$, alors $y \in f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut affirmer que $f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Ceci étant vrai pour tout $A \subseteq E$, on peut affirmer que $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Donc si $f$ est surjective, alors $\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)$.

Finalement, $\boxed{\left(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)\right) \iff f \text{ est surjective}}$.

♦ (3) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) = \complement_F f^{\rightarrow}(A) \\
\iff & \left(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)\right) \text{ et } \left(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)\right) \\
\underset{(1)}{\iff} & f \text{ est injective et } \left(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \supseteq \complement_F f^{\rightarrow}(A)\right) \\
\underset{(2)}{\iff} & f \text{ est injective et } f \text{ est surjective} \\
\iff & f \text{ est bijective}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\left(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) = \complement_F f^{\rightarrow}(A)\right) \iff f \text{ est bijective}}$.

♦ (4)
Soit $A$ une partie de $E$.
Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq f^{\rightarrow}(A)$.
On a alors $\operatorname{im}(f) = f^{\rightarrow}(E) \underset{27 \text{ p. } 35}{=} f^{\rightarrow}\left(A \cup \complement_E A\right) \underset{128 \text{ p. } 163}{=} f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right)$
$\subseteq f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(A) \underset{16 \text{ p. } 16}{=} f^{\rightarrow}(A)$.
Donc $\operatorname{im}(f) \subseteq f^{\rightarrow}(A)$.

De plus, $f^{\rightarrow}(A) \subseteq \operatorname{im}(f)$ d'après la prop. 127 p. 162.

Donc $f^{\rightarrow}(A) = \operatorname{im}(f)$.
Donc si $f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq f^{\rightarrow}(A)$, alors $f^{\rightarrow}(A) = \operatorname{im}(f)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f^{\rightarrow}(A) = \operatorname{im}(f)$.
Or, on a $f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq \operatorname{im}(f)$ d'après la prop. 127 p. 162.
Donc $f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq f^{\rightarrow}(A)$.

Donc si $f^{\rightarrow}(A) = \mathrm{im}(f)$, alors $f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq f^{\rightarrow}(A)$.

Finalement, $\boxed{f^{\rightarrow}\left(\complement_E A\right) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \iff f^{\rightarrow}(A) = \mathrm{im}(f)}$.
**CQFD**.

## Proposition 130 (Image directe et différences)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

(1) $f^{\rightarrow}(A - B) \supseteq f^{\rightarrow}(A) - f^{\rightarrow}(B)$

(2) $\Big(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C - D) = f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)\Big) \iff f$ est injective

(3) $f^{\rightarrow}(A \Delta B) \supseteq f^{\rightarrow}(A) \Delta f^{\rightarrow}(B)$

(4) $\Big(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C \Delta D) = f^{\rightarrow}(C) \Delta f^{\rightarrow}(D)\Big) \iff f$ est injective

*Démonstration*

♦ (1)

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}(A) - f^{\rightarrow}(B)$.

En particulier, $y \in f^{\rightarrow}(A)$.

Il existe donc $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Supposons par l'absurde que $x \in B$.

Alors comme $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(B)$.

C'est absurde puisque $y \in f^{\rightarrow}(A) - f^{\rightarrow}(B)$.

Donc $x \notin B$.

Donc $x \in A - B$.

Donc comme $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(A - B)$.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}(A) - f^{\rightarrow}(B)$, alors $y \in f^{\rightarrow}(A - B)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut affirmer que $\boxed{f^{\rightarrow}(A - B) \supseteq f^{\rightarrow}(A) - f^{\rightarrow}(B)}$.

♦ (2)

La propriété $(1)$ nous permet de réduire le problème à l'équivalence suivante :

« $\Big(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C - D) \subseteq f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)\Big) \iff f$ est injective »

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\left(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C - D) \subseteq f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)\right)$.

Soient $a$ et $b$ dans $E$.

Supposons que $a \neq b$.

Donc $a \notin \{b\}$.

Posons $C = \{a; b\}$ et $D = \{b\}$.

On a donc $a \in C$ et $a \notin D$.

Donc $a \in C - D$.

Donc $f(a) \in f^{\rightarrow}(C - D)$.

Or, $f^{\rightarrow}(C - D) \subseteq f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)$ par hypothèse.

Donc $f(a) \in f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)$.

Donc $f(a) \in f^{\rightarrow}(C)$ et $f(a) \notin f^{\rightarrow}(D)$.

En particulier, $f(a) \notin f^{\rightarrow}(D)$.

Or, $D = \{b\}$.

Donc $f^{\rightarrow}(D) = f^{\rightarrow}\left(\{b\}\right) = \left\{f(b)\right\}$ d'après la prop. 126 p. 161.

Donc $f(a) \notin \left\{f(b)\right\}$.

Donc $f(a) \neq f(b)$.

Donc si $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$ par contraposition.

Ceci étant vrai pour tous $a$ et $b$ de $E$, on peut dire que $f$ est injective.

Donc si $\left(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C - D) \subseteq f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)\right)$, alors $f$ est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est injective.

Montrons que $\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C - D) \subseteq f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)$.

Soient $C$ et $D$ des parties de $E$.

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}(C - D)$.

Il existe donc $x \in C - D$ tel que $y = f(x)$.

Donc $x \in C$ et $x \notin D$.

En particulier, $x \in C$.

Donc comme $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(C)$.

Supposons par l'absurde que $y \in f^{\rightarrow}(D)$.

Il existe donc $d \in D$ tel que $y = f(d)$.

Donc $f(x) = y = f(d)$ donc $f(x) = f(d)$.

Or, $f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = d$.

Donc $x \in D$.

C'est absurde puisqu'on a dit que $x \notin D$.

Donc $y \notin f^{\rightarrow}(D)$.

Ainsi, $y \in f^{\rightarrow}(C)$ et $y \notin f^{\rightarrow}(D)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)$.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}(C - D)$, alors $y \in f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut affirmer que $f^{\rightarrow}(C-D) \subseteq f^{\rightarrow}(C)-f^{\rightarrow}(D)$.

Ceci étant vrai pour toutes parties $C$ et $D$ de $E$, on peut affirmer que
$\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C - D) \subseteq f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)$.

Donc si $f$ est injective, alors $\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C - D) \subseteq f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)$.

Finalement, $\boxed{\Big(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C - D) = f^{\rightarrow}(C) - f^{\rightarrow}(D)\Big) \iff f \text{ est injective}}$.

♦ (3)

On a $f^{\rightarrow}(A \cup B) = f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$ d'après la prop. 128 p. 163.
En particulier, on a $f^{\rightarrow}(A \cup B) \supseteq f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$ $(\star)$.

De même, on a $f^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$ d'après la prop. 128 p. 163.
Donc $\complement_F f^{\rightarrow}(A \cap B) \supseteq \complement_F \Big(f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)\Big)$ $(\star\star)$ par décroissance de $\complement_F$.

On peut donc dire par compatibilité de $\cap$ avec $\supseteq$, en combinant $(\star)$ et $(\star\star)$ que
$\Big[f^{\rightarrow}(A \cup B) \cap \complement_F f^{\rightarrow}(A \cap B)\Big] \supseteq \Big[\Big(f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)\Big) \cap \complement_F \Big(f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)\Big)\Big]$.

Or on a $\Big(f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)\Big) \cap \complement_F \Big(f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)\Big)$
$= \Big(f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)\Big) - \Big(f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)\Big)$ d'après la prop. 28 p. 36
$= f^{\rightarrow}(A) \Delta f^{\rightarrow}(B)$ par définition de $\Delta$.
On a donc $\Big[f^{\rightarrow}(A \cup B) \cap \complement_F f^{\rightarrow}(A \cap B)\Big] \supseteq f^{\rightarrow}(A) \Delta f^{\rightarrow}(B)$.

Or, $f^{\rightarrow}(A \cup B) \cap \complement_F f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A \cup B) - f^{\rightarrow}(A \cap B)$ d'après la prop. 28 p. 36.
Donc $\Big[f^{\rightarrow}(A \cup B) - f^{\rightarrow}(A \cap B)\Big] \supseteq f^{\rightarrow}(A) \Delta f^{\rightarrow}(B)$.

Or, (1) nous dit que $f^{\rightarrow}\Big((A \cup B) - (A \cap B)\Big) \supseteq \Big[f^{\rightarrow}(A \cup B) - f^{\rightarrow}(A \cap B)\Big]$.
Donc $f^{\rightarrow}\Big((A \cup B) - (A \cap B)\Big) \supseteq f^{\rightarrow}(A) \Delta f^{\rightarrow}(B)$.

Or, $f^{\rightarrow}\Big((A \cup B) - (A \cap B)\Big) = f^{\rightarrow}(A \Delta B)$ par définition de $\Delta$.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}(A\Delta B) \supseteq f^{\rightarrow}(A)\Delta f^{\rightarrow}(B)}$.

♦ (4)

La propriété $(1)$ nous permet de réduire le problème à l'équivalence suivante :
$\Big(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C\Delta D) \subseteq f^{\rightarrow}(C)\Delta f^{\rightarrow}(D)\Big) \iff f$ est injective.
Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C\Delta D) \subseteq f^{\rightarrow}(C)\Delta f^{\rightarrow}(D)$.

Soient $a$ et $b$ dans $E$.

Supposons que $a \neq b$.

Donc $a \notin \{b\}$.

On a donc $a \in E$ et $a \notin \{b\}$.

Donc $a \in \complement_E\{b\}$.

Or, on a $\complement_E\{b\} = \{b\}\Delta E$ d'après la prop. 33 p. 41.

Donc $a \in \{b\}\Delta E$.

Donc $f(a) \in f^{\rightarrow}\Big(\{b\}\Delta E\Big)$.

Or, $f^{\rightarrow}\Big(\{b\}\Delta E\Big) \subseteq f^{\rightarrow}\Big(\{b\}\Big)\Delta f^{\rightarrow}(E)$ par hypothèse.

Donc $f(a) \in f^{\rightarrow}\Big(\{b\}\Big)\Delta f^{\rightarrow}(E)$.

Or, $f^{\rightarrow}\Big(\{b\}\Big)\Delta f^{\rightarrow}(E) \underset{33 \text{ p. } 41}{=} \complement_{f^{\rightarrow}(E)} f^{\rightarrow}\Big(\{b\}\Big) \underset{126 \text{ p. } 161}{=} \complement_{f^{\rightarrow}(E)}\Big\{f(b)\Big\}$.

Donc $f(a) \in \complement_{f^{\rightarrow}(E)}\Big\{f(b)\Big\}$.

En particulier, $f(a) \notin \Big\{f(b)\Big\}$.

Donc $f(a) \neq f(b)$.

Donc si $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$ par contraposition.

Ceci étant vrai pour tout $a$ et $b$ dans $E$, on peut dire que $f$ est injective.

Donc si $\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C\Delta D) \subseteq f^{\rightarrow}(C)\Delta f^{\rightarrow}(D)$, alors $f$ est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est injective.

Soient $C$ et $D$ des parties de $E$.

On a alors $f^{\rightarrow}(C\Delta D) = f^{\rightarrow}\Big((C \cup D) - (C \cap D)\Big) \underset{(2)}{=} f^{\rightarrow}(C \cup D) - f^{\rightarrow}(C \cap D)$

$\underset{128 \text{ p. } 163}{=} \Big(f^{\rightarrow}(C) \cup f^{\rightarrow}(D)\Big) - \Big(f^{\rightarrow}(C) \cap f^{\rightarrow}(D)\Big) = f^{\rightarrow}(C)\Delta f^{\rightarrow}(D)$.

Donc $f^{\rightarrow}(C\Delta D) = f^{\rightarrow}(C)\Delta f^{\rightarrow}(D)$.

Ceci étant vrai pour toutes parties $C$ et $D$ de $E$, on peut dire que
$\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C\Delta D) \subseteq f^{\rightarrow}(C)\Delta f^{\rightarrow}(D)$.
Donc si $f$ est injective, alors $\forall (C;D) \in \mathcal{P}(E)^2, f^{\rightarrow}(C\Delta D) \subseteq f^{\rightarrow}(C)\Delta f^{\rightarrow}(D)$.

Finalement, $\boxed{\Big(\forall C \subseteq E, \forall D \subseteq E, f^{\rightarrow}(C\Delta D) = f^{\rightarrow}(C)\Delta f^{\rightarrow}(D)\Big) \iff f \text{ est injective}}$.
**CQFD**.

## Proposition 131 (Image directe et composition)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

On a $(g \circ f)^{\rightarrow} = g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}$.

On dit que le passage d'une application à son application image directe est un **morphisme**.

*Démonstration*

• Commençons par montrer que les ensembles de départs et d'arrivés sont bien les mêmes.
Comme $f : E \to F$ et $g : F \to G$, on a $g \circ f : E \to G$. Donc $(g \circ f)^{\rightarrow} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(G)$.

Comme $f : E \to F$, on a $f^{\rightarrow} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(G)$, et comme $g : F \to G$, on a $g^{\rightarrow} : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(G)$.
Donc $g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow} : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(G)$.

Ainsi, les deux applications vont bien de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(G)$.

• Montrons que $\forall A \subseteq E, (g \circ f)^{\rightarrow}(A) = \Big(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\Big)(A)$.

Soit $A \subseteq E$.

Soit $z \in G$.

Supposons que $z \in (g \circ f)^{\rightarrow}(A)$.
Il existe donc $x \in A$ tel que $z = (g \circ f)(x)$.
On a donc $z = g(f(x))$ d'après la prop. 97 p. 124.
Posons $y = f(x)$. On a donc $z = g(f(x)) = g(y)$.
Comme $y = f(x)$ et $x \in A$, on a $y \in f^{\rightarrow}(A)$.
Comme $z = g(y)$ et $y \in f^{\rightarrow}(A)$, on a $z \in g^{\rightarrow}\Big(f^{\rightarrow}(A)\Big)$.
Or, on a $g^{\rightarrow}\Big(f^{\rightarrow}(A)\Big) = \Big(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\Big)(A)$ d'après la prop. 97 p. 124.
Donc $z \in \Big(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\Big)(A)$.

Donc si $z \in (g \circ f)^{\rightarrow}(A)$, alors $z \in \left(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\right)(A)$.

Supposons que $z \in \left(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\right)(A)$.
On sait que $\left(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\right)(A) = g^{\rightarrow}\left(f^{\rightarrow}(A)\right)$ d'après la prop. 97 p. 124.
Donc $z \in g^{\rightarrow}\left(f^{\rightarrow}(A)\right)$.
Il existe donc $y \in f^{\rightarrow}(A)$ tel que $z = g(y)$.
On a $y \in f^{\rightarrow}(A)$ donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Ainsi, $z = g(y) = g(f(x)) \underset{97 \text{ p. } 124}{=} (g \circ f)(x)$.
Donc comme $x \in A$ et $z = (g \circ f)(x)$, on a $z \in (g \circ f)^{\rightarrow}(A)$.
Donc si $z \in \left(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\right)(A)$, alors $z \in (g \circ f)^{\rightarrow}(A)$.

Ainsi, $z \in (g \circ f)^{\rightarrow}(A)$ si et seulement si $z \in \left(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\right)(A)$.
Ceci étant vrai pour tout $z \in G$, on peut dire que $(g \circ f)^{\rightarrow}(A) = \left(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\right)(A)$.
Ceci étant vrai pour tout $A \subseteq E$, on peut dire que $\forall A \subseteq E, (g \circ f)^{\rightarrow}(A) = \left(g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}\right)(A)$.
Donc $\boxed{(g \circ f)^{\rightarrow} = g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}}$.
**CQFD**.

## Proposition 132 (Application image directe et inversibilité)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \rightarrow F$.

(1) $f$ est inversible à gauche si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est inversible à gauche.
Dans ce cas là, si $g$ est une inverse à gauche de $f$, alors $g^{\rightarrow}$ est une inverse à gauche de $f^{\rightarrow}$.

(2) $f$ est inversible à droite si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est inversible à droite.
Dans ce cas là, si $g$ est une inverse à droite de $f$, alors $g^{\rightarrow}$ est une inverse à droite de $f^{\rightarrow}$.

(3) $f$ est inversible si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est inversible.
Dans ce cas là, $\left(f^{-1}\right)^{\rightarrow} = \left(f^{\rightarrow}\right)^{-1}$.

*Démonstration*

♦ (1) Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $f$ est inversible à gauche.
Il existe donc $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
On a alors $g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow} \underset{131 \text{ p. } 174}{=} (g \circ f)^{\rightarrow} = \mathrm{id}_E^{\rightarrow} \underset{124 \text{ p. } 159}{=} \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$.
Donc $g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Donc $f^{\to}$ est inversible à gauche.

Donc si $f$ est inversible à gauche, alors $f^{\to}$ est inversible à gauche.

Et on sait que $g^{\to}$ est une inverse à gauche de $f^{\to}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f^{\to}$ est inversible à gauche.

Il existe donc $h : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ telle que $h \circ f^{\to} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

En particulier, pour tout $x \in E$, on a $h\left(f^{\to}\Big(\{x\}\Big)\right) = (h \circ f^{\to})\left(\{x\}\right) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}\Big(\{x\}\Big) = \{x\}$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, on a $h\left(f^{\to}\Big(\{x\}\Big)\right) = \{x\}$.

Or, pour tout $x \in E$ on a $f^{\to}\Big(\{x\}\Big) = \Big\{f(x)\Big\}$ d'après la prop. 126 p. 161.

Donc pour tout $x \in E$, on a $h\left(\Big\{f(x)\Big\}\right) = \{x\}$ $(\star)$.

Fixons un certain $x_0 \in E$.

Considérons $\begin{array}{rccl} \varphi : & F & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ & y & \longmapsto & \{y\} \end{array}$ et $\left(\begin{array}{rccl} \psi : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & E \\ & A & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } A = \{x\} \\ x_0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}\right)$

On a $\varphi : F \to \mathcal{P}(F)$, $h : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ et $\psi : \mathcal{P}(E) \to E$.

On peut donc considérer $g = \psi \circ h \circ \varphi : F \to E$.

On peut présenter la situation avec le diagramme suivant :
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & E \\ \mathcal{P}(F) \arrow[r, "h"] & \mathcal{P}(E) \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Montrons que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Soit $x \in E$. On a alors

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &\underset{97 \text{ p. } 124}{=} g\Big(f(x)\Big) \\ &= (\psi \circ h \circ \varphi)\Big(f(x)\Big) \\ &= (\psi \circ h)\Big(\varphi(f(x))\Big) \\ &= (\psi \circ h)\Big(\{f(x)\}\Big) \text{ par définition de } \varphi \\ &= \psi\left(h\Big(\{f(x)\}\Big)\right) \\ &= \psi\Big(\{x\}\Big) \text{ d'après } (\star) \\ &= x \text{ par définition de } \psi \end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)(x) = x = \mathrm{id}_E(x)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut dire que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Donc $f$ est inversible à gauche.

Donc si $f^{\to}$ est inversible à gauche, alors $f$ est inversible à gauche.

Finalement, $\boxed{f \text{ est inversible à gauche si et seulement si } f^{\to} \text{ est inversible à gauche}}$.

♦ (2) Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $f$ est inversible à droite.

Il existe donc $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

On a alors $f^{\to} \circ g^{\to} \underset{131 \text{ p. } 174}{=} (f \circ g)^{\to} = \mathrm{id}_F{}^{\to} \underset{124 \text{ p. } 159}{=} \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$.

Donc $f^{\to} \circ g^{\to} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$.

Donc $f^{\to}$ est inversible à droite.

Donc si $f$ est inversible à droite, alors $f^{\to}$ est inversible à droite.

De plus, on a vu que $g^{\to}$ est une inverse à droite de $f^{\to}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f^{\to}$ est inversible à droite.

Il existe donc $h : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ telle que $f^{\to} \circ h = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$.

On sait que pour tout $y \in F$, on a $f^{\to}\Big(h(\{y\})\Big) \underset{97 \text{ p. } 124}{=} (f^{\to} \circ h)\Big(\{y\}\Big) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}\Big(\{y\}\Big) = \{y\}$.

En particulier, pour tout $y \in F$, on a $f^{\to}\Big(h(\{y\})\Big) \neq \emptyset$.

Donc pour tout $y \in F$, on a $h(\{y\}) \neq \emptyset$ d'après la prop. 125 p. 160.

En posant $X = \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$, **l'axiome du choix** nous assure l'existence d'une application $\phi : X \to \bigcup X$ telle que pour tout $A \in X$, on a $\phi(A) \in A$.

Autrement dit, pour toute partie non vide $A$ de $E$, on a $\phi(A) \in A$.

En particulier, pour tout $y \in F$, on a $\phi\Big(h(\{y\})\Big) \in h(\{y\})$.

Fixons un certain $x_0 \in E$.

Considérons $\left(\begin{array}{cccc} \psi : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & E \\ & A & \longmapsto & \begin{cases} \phi(A) & \text{si } A \neq \emptyset \\ x_0 & \text{si } A = \emptyset \end{cases} \end{array}\right)$

On a ainsi pour tout $y \in F$, $\psi\Big(h(\{y\})\Big) = \phi\Big(h(\{y\})\Big) \in h(\{y\})$.

Considérons aussi $\begin{array}{cccc} \varphi : & F & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ & y & \longmapsto & \{y\} \end{array}$.

On a donc $\varphi : F \to \mathcal{P}(F)$, $h : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ et $\psi : \mathcal{P}(E) \to E$.

On peut donc considérer $g = \psi \circ h \circ \varphi : F \to E$.

On peut présenter la situation avec le diagramme suivant : $\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & {\scriptstyle \psi}\uparrow \\ \mathcal{P}(F) & \xrightarrow{h} & \mathcal{P}(E) \end{array}$

Montrons que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Soit $y \in F$. On a alors :

$$\begin{aligned} g(y) &= (\psi \circ h \circ \varphi)(y) \\ &\underset{97 \text{ p. } 124}{=} (\psi \circ h)\Big(\varphi(y)\Big) \\ &= (\psi \circ h)(\{y\}) \\ &\underset{97 \text{ p. } 124}{=} \psi\Big(h(\{y\})\Big). \end{aligned}$$

On a donc $g(y) = \psi\Big(h(\{y\})\Big)$.

Or, on a dit plus tôt que $\psi\Big(h(\{y\})\Big) \in h(\{y\})$.

Donc $g(y) \in h(\{y\})$.

Donc $f\Big(g(y)\Big) \in f^{\rightarrow}\Big(h(\{y\})\Big)$.

Donc $(f \circ g)(y) \in f^{\rightarrow}\Big(h(\{y\})\Big)$.

Or, on a $f^{\rightarrow}\Big(h(\{y\})\Big) \underset{97 \text{ p. } 124}{=} (f^{\rightarrow} \circ h)\Big(\{y\}\Big) = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}\Big(\{y\}\Big) = \{y\}$.

Donc $f^{\rightarrow}\Big(h(\{y\})\Big) = \{y\}$.

Donc $(f \circ g)(y) \in \{y\}$.

Donc $(f \circ g)(y) = y$.

Donc $(f \circ g)(y) = \mathrm{id}_F(y)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut affirmer que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Donc $f$ est inversible à droite.

Ainsi, si $f^{\rightarrow}$ est inversible à droite, alors $f$ est inversible à droite.

Finalement, $\boxed{f \text{ est inversible à droite si et seulement si } f^{\rightarrow} \text{ est inversible à droite}}$.

♦ (3) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f \text{ est inversible} &\iff f \text{ est inversible à gauche et à droite} \\ &\iff f^{\rightarrow} \text{ est inversible à gauche et à droite} \\ &\iff f^{\rightarrow} \text{ est inversible.} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{f \text{ est inversible si et seulement si } f^{\rightarrow} \text{ est inversible}}$.

De plus, on a alors $f^{\rightarrow} \circ (f^{-1})^{\rightarrow} \underset{131 \text{ p. } 174}{=} (f \circ f^{-1})^{\rightarrow} = \mathrm{id}_F{}^{\rightarrow} \underset{124 \text{ p. } 159}{=} \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$.

Donc $f^{\rightarrow} \circ (f^{-1})^{\rightarrow} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$.

Donc $\boxed{(f^{-1})^{\rightarrow} = (f^{\rightarrow})^{-1}}$.

**CQFD**.

## Proposition 133 (Application image directe et "jectivité" )

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

(1) $f^{\to}$ est injective si et seulement si $f$ est injective.
(2) $f^{\to}$ est surjective si et seulement si $f$ est surjective.
(3) $f^{\to}$ est bijective si et seulement si $f$ est bijective.

*Démonstration*

♦ (1) Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{\to}$ est injective.

Soient $a$ et $b$ dans $E$.

Supposons que $f(a) = f(b)$.

Donc $\Big\{f(a)\Big\} = \Big\{f(b)\Big\}$.

Donc $f^{\to}\Big(\{a\}\Big) \underset{126 \text{ p. } 161}{=} \Big\{f(a)\Big\} = \Big\{f(b)\Big\} \underset{126 \text{ p. } 161}{=} f^{\to}\Big(\{b\}\Big)$.

Donc $f^{\to}\Big(\{a\}\Big) = f^{\to}\Big(\{b\}\Big)$.

Or, $f^{\to}$ est injective par hypothèse.

Donc $\{a\} = \{b\}$.

Or, $a \in \{a\}$.

Donc $a \in \{b\}$.

Donc $a = b$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Ceci étant vrai pour tout $a$ et $b$ de $E$, on peut dire que $f$ est injective.

Donc si $f^{\to}$ est injective, alors $f$ est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est injective.

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

Supposons que $f^{\to}(A) = f^{\to}(B)$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in A$.

Alors $f(x) \in f^{\to}(A)$ par définition.

Or, on a $f^{\to}(A) = f^{\to}(B)$ par hypothèse.

Donc $f(x) \in f^{\to}(B)$.

Donc il existe $b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$.

Or, $f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = b$.

Donc $x \in B$.

Donc si $x \in A$, alors $x \in B$.

De même,

Supposons que $x \in B$.

Alors $f(x) \in f^{\rightarrow}(B)$ par définition.

Or, on a $f^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}(B)$ par hypothèse.

Donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(A)$.

Donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$.

Or, $f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = a$.

Donc $x \in A$.

Donc si $x \in B$, alors $x \in A$.

Ainsi, $x \in A$ si et seulement si $x \in B$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut dire que $A = B$.

Donc si $f^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}(B)$, alors $A = B$.

Ceci étant vrai pour toutes parties $A$ et $B$ de $E$, on peut dire que $f^{\rightarrow}$ est injective.

Donc si $f$ est injective, alors $f^{\rightarrow}$ est injective.

On aurait aussi pu utiliser directement la proposition 132 page 175 et l'équivalence entre injectivité et inversibilité à gauche.

Finalement, $\boxed{f^{\rightarrow} \text{ est injective si et seulement si } f \text{ est injective}}$.

♦ (2) Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{\rightarrow}$ est surjective.

Soit $y \in F$.

Comme $f^{\rightarrow}$ est surjective, il existe $A \subseteq E$ telle que $f^{\rightarrow}(A) = \{y\}$.

Comme $\{y\} \neq \emptyset$, on a $A \neq \emptyset$ d'après la prop. 125 p. 160.

Il existe donc $a \in A$.

Donc $f(a) \in f^{\rightarrow}(A)$.

Or, on a dit que $f^{\rightarrow}(A) = \{y\}$.

Donc $f(a) \in \{y\}$.

Donc $f(a) = y$.

Donc $\forall y \in F, \exists a \in E, y = f(x)$.

Donc $f$ est surjective.

On aurait aussi pu dire que comme $f^{\rightarrow}$ est surjective, il existe $A \subseteq E$ telle que $f^{\rightarrow}(A) = F$.

De plus, on a $f^{\rightarrow}(A) \subseteq \text{im}(f)$ d'après la prop. 127 p. 162.

On a donc $F \subseteq \text{im}(f)$.

Mais on a aussi $\text{im}(f) \subseteq F$ par définition de $f$.

Donc $\text{im}(f) = F$.

Donc $f$ est surjective.

Donc si $f^{\rightarrow}$ est surjective, alors $f$ est surjective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est surjective.

Alors $f$ est inversible à droite d'après la prop. 114 p. 149.

Donc $f^{\rightarrow}$ est inversible à droite d'après la prop. 132 p. 175.

Donc $f^{\rightarrow}$ est surjective d'après la prop. 114 p. 149.

Donc si $f$ est surjective, alors $f^{\rightarrow}$ est surjective.

Finalement, $\boxed{f^{\rightarrow} \text{ est surjective si et seulement si } f \text{ est surjective}}$.

♦ (3) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f^{\rightarrow} \text{ est bijective} &\iff f^{\rightarrow} \text{ est injective et surjective} \\ &\iff f \text{ est injective et surjective} \\ &\iff f \text{ est bijective} \end{aligned}$$

**CQFD**.

## 4.2 Image réciproque

### Définition 61 (Image réciproque)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$. Soit $B$ une partie de $F$.

• On appelle **image réciproque** de $B$ par $f$ la partie de $E$ définie par $\{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
On note $f^{\leftarrow}(B)$ cet ensemble.

• On défini ainsi une application $\begin{array}{rccc} f^{\leftarrow} : & \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & B & \longmapsto & f^{\leftarrow}(B) \end{array}$.

### Remarque 6

Ici aussi, la plupart des auteurs notent $f^{-1}(B)$ à la place de $f^{\leftarrow}(B)$. Pour les mêmes raisons que pour l'image directe, on évitera au maximum cette notation qui peut porter à confusion.

### Proposition 134 (Image réciproque de l'identité)

Soit $E$ un ensemble non vide.

Pour tout $B \subseteq E$, on a $\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B) = B$.
Autrement dit, on a $\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

*Démonstration*

Soit $B$ une partie de $E$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in \mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B)$.
Il existe donc $b \in B$ tel que $\mathrm{id}_E(x) = b$.
Or, $\mathrm{id}_E(x) = x$ par définition de l'identité.
Donc $x = b$.
Donc $x \in B$.

Donc si $x \in \mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B)$, alors $x \in B$.

Supposons que $x \in B$.
On a alors $\mathrm{id}_E(x) = x$.
Donc $\mathrm{id}_E(x) \in B$.
Donc $x \in \mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B)$.

Ainsi, si $x \in B$, alors $x \in \mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B)$.

Finalement, $x \in \mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B)$ si et seulement si $x \in B$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut dire que $\boxed{\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B) = B}$.

**CQFD**.

## Proposition 135 (Image réciproque et vide)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

$(1)$ Pour toute partie $B$ de $F$, si $f^{\leftarrow}(B) \neq \emptyset$, alors $B \neq \emptyset$.

$(2)$ $f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset$.

*Démonstration*

$(1)$ Supposons que $f^{\leftarrow}(B) \neq \emptyset$.

Alors il existe $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $f(x) \in B$.

Donc $\boxed{B \neq \emptyset}$.

$(2)$ Il suffit de prendre la contraposée de $(1)$ : si $B = \emptyset$, alors $f^{\leftarrow}(B) = \emptyset$.

En particulier, $f^{\leftarrow}(\emptyset) = f^{\leftarrow}(B) = \emptyset$.

Donc $\boxed{f^{\leftarrow}(\emptyset) = \emptyset}$.

**CQFD**.

**Remarque** :

Pour $E$ et $F$ deux ensembles non vide, $f : E \to F$ et $y \in F$, il est intéressant de noter que $f^{\leftarrow}\Big(\{y\}\Big)$ est l'ensemble des antécédents de $y$ par $f$.

## Proposition 136 (Image réciproque de l'ensemble d'arrivée)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

On a $f^{\leftarrow}(F) = E$

*Démonstration*

Par définition, on sait que $f^{\leftarrow}(F) \subseteq E$.
Il reste donc à montrer que $f^{\leftarrow}(F) \supseteq E$.

Soit $x \in E$.
On a par définition de $f$ que $f(x) \in F$.
Donc $x \in f^{\leftarrow}(F)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut dire que $\forall x \in E, x \in f^{\leftarrow}(F)$.
Donc $E \subseteq f^{\leftarrow}(F)$.

Finalement, $\boxed{f^{\leftarrow}(F) = E}$.
**CQFD**.

**Remarque** :
Nous verrons dans la partie sur le lien entre image directe et image réciproque une généralisation de cette propriété.

## Proposition 137 (Croissance de l'image réciproque)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.
Soient $A$ et $B$ deux parties de $F$.

Si $A \subseteq B$, alors $f^{\leftarrow}(A) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.
On dit que $f^{\leftarrow}$ est **croissante** (pour l'inclusion).

*Démonstration*

Supposons que $A \subseteq B$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in f^{\leftarrow}(A)$. Donc $f(x) \in A$.
Or, $A \subseteq B$ par hypothèse.
Donc $f(x) \in B$.
Donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $x \in f^{\leftarrow}(A) \Rightarrow x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut affirmer que $f^{\leftarrow}(A) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

Ainsi, $\boxed{\text{si } A \subseteq B, \text{ alors } f^{\leftarrow}(A) \subseteq f^{\leftarrow}(B)}$.
**CQFD**.

## Proposition 138 (Image directe et opérations usuelles)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soient $A$ et $B$ des parties de $F$.

(1) $f^{\leftarrow}(A \cup B) = f^{\leftarrow}(A) \cup f^{\leftarrow}(B)$

(2) $f^{\leftarrow}(A \cap B) = f^{\leftarrow}(A) \cap f^{\leftarrow}(B)$

(3) $f^{\leftarrow}(A - B) = f^{\leftarrow}(A) - f^{\leftarrow}(B)$

(4) $f^{\leftarrow}(A \Delta B) = f^{\leftarrow}(A) \Delta f^{\leftarrow}(B)$

*Démonstration*

- (1)

  Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & x \in f^{\leftarrow}(A \cup B) \\ \iff & f(x) \in A \cup B \\ \iff & \Big(f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B\Big) \\ \iff & \Big(x \in f^{\leftarrow}(A) \text{ ou } x \in f^{\leftarrow}(B)\Big) \\ \iff & x \in f^{\leftarrow}(A) \cup f^{\leftarrow}(B) \end{aligned}$$

  Donc $x \in f^{\leftarrow}(A \cup B) \iff x \in f^{\leftarrow}(A) \cup f^{\leftarrow}(B)$.

  Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut affirmer que $\boxed{f^{\leftarrow}(A \cup B) = f^{\leftarrow}(A) \cup f^{\leftarrow}(B)}$.

- (2)

  Soit $x \in E$. On a les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned} & x \in f^{\leftarrow}(A \cap B) \\ \iff & f(x) \in A \cap B \\ \iff & \Big(f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B\Big) \\ \iff & \Big(x \in f^{\leftarrow}(A) \text{ et } x \in f^{\leftarrow}(B)\Big) \\ \iff & x \in f^{\leftarrow}(A) \cap f^{\leftarrow}(B) \end{aligned}$$

  Donc $x \in f^{\leftarrow}(A \cap B) \iff x \in f^{\leftarrow}(A) \cap f^{\leftarrow}(B)$.

  Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut affirmer que $\boxed{f^{\leftarrow}(A \cap B) = f^{\leftarrow}(A) \cap f^{\leftarrow}(B)}$.

- (3)

  Soit $x \in E$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & x \in f^{\leftarrow}(A-B) \\ \iff & f(x) \in A - B \\ \iff & \big(f(x) \in A \text{ et } f(x) \notin B\big) \\ \iff & \big(x \in f^{\leftarrow}(A) \text{ et } x \notin f^{\leftarrow}(B)\big) \\ \iff & x \in f^{\leftarrow}(A) - f^{\leftarrow}(B) \end{aligned}$$

Ainsi, $x \in f^{\leftarrow}(A-B) \iff x \in f^{\leftarrow}(A) - f^{\leftarrow}(B)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut affirmer que $\boxed{f^{\leftarrow}(A-B) = f^{\leftarrow}(A) - f^{\leftarrow}(B)}$.

♦ (4)

On a les égalités suivantes :

$$f^{\leftarrow}(A\Delta B) = f^{\leftarrow}\big((A\cup B) - (A\cap B)\big) \underset{(3)}{=} f^{\leftarrow}(A\cup B) - f^{\leftarrow}(A\cap B)$$

$$\underset{(1)}{=} \big(f^{\leftarrow}(A)\cup f^{\leftarrow}(B)\big) - \big(f^{\leftarrow}(A\cap B)\big) \underset{(2)}{=} \big(f^{\leftarrow}(A)\cup f^{\leftarrow}(B)\big) - \big(f^{\leftarrow}(A)\cap f^{\leftarrow}(B)\big) = f^{\leftarrow}(A)\Delta f^{\leftarrow}(B).$$

Donc $\boxed{f^{\leftarrow}(A\Delta B) = f^{\leftarrow}(A)\Delta f^{\leftarrow}(B)}$.

**CQFD**.

## Proposition 139 (Image réciproque et complémentaire)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soit $B$ une partie de $F$.

(1) $f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) = \complement_E f^{\leftarrow}(B)$.

(2) $f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$ si et seulement si $f^{\leftarrow}(B) = E$

*Démonstration*

♦ (1) D'après la proposition 136 page 183, on a $f^{\leftarrow}(F) = E$.

Ainsi, en appliquant $(1)$ avec $A = F$, on obtient les égalités suivantes :

$$f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) = f^{\leftarrow}(F-B) \underset{138 \text{ p. } 185}{=} f^{\leftarrow}(F) - f^{\leftarrow}(B) \underset{136 \text{ p. } 183}{=} E - f^{\leftarrow}(B) = \complement_E f^{\leftarrow}(B).$$

Et donc $\boxed{f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) = \complement_E f^{\leftarrow}(B)}$.

♦ (2) Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

Or, $(2)$ nous dit que $f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) = \complement_E f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $\complement_E f^{\leftarrow}(B) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $\left(\complement_E f^{\leftarrow}(B)\right) \cap f^{\leftarrow}(B) = \complement_E f^{\leftarrow}(B)$ d'après la prop. 22 p. 23.

Or, $\left(\complement_E f^{\leftarrow}(B)\right) \cap f^{\leftarrow}(B) = \emptyset$ d'après la prop. 27 p. 35.

Donc $\complement_E f^{\leftarrow}(B) = \emptyset$.

Donc $E - f^{\leftarrow}(B) = \emptyset$.

Donc $E \subseteq f^{\leftarrow}(B)$ d'après la prop. 27 p. 35.

Or, on a $f^{\leftarrow}(B) \subseteq E$ par définition de l'image réciproque.

Donc $f^{\leftarrow}(B) = E$.

Ainsi, si $f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$, alors $f^{\leftarrow}(B) = E$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f^{\leftarrow}(B) = E$.

Or $\complement_E f^{\leftarrow}(B) \subseteq E$ par définition.

Donc $\complement_E f^{\leftarrow}(B) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

Or, $\complement_E f^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right)$ d'après $(2)$.

Donc $f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

Ainsi si $f^{\leftarrow}(B) = E$, alors $f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

Finalement, $\boxed{f^{\leftarrow}\left(\complement_F B\right) \subseteq f^{\leftarrow}(B) \iff f^{\leftarrow}(B) = E}$.

**CQFD.**

## Proposition 140 (Image réciproque et composition)

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles non vides. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

On a alors $(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}$.

*Démonstration*

• Commençons par remarquer qu'elles ont bien les mêmes ensembles de départs et d'arrivées.

On a $f : E \to F$ et $g : F \to G$ donc $g \circ f : E \to G$ donc $(g \circ f)^{\leftarrow} : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(E)$.

De plus, $g^{\leftarrow} : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(F)$ et $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ donc $f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow} : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(E)$.

Les ensembles de départs et d'arrivés sont donc bien les mêmes.

• Montrons à présent que pour tout $A \subseteq G$, on a $(g \circ f)^{\leftarrow}(A) = (f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow})(A)$.

Soit $A$ une partie de $G$.

Soit $x \in E$.

On a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(A) \\
\Longleftrightarrow\ & (g \circ f)(x) \in A \\
\underset{97 \text{ p. } 124}{\Longleftrightarrow}\ & g(f(x)) \in A \\
\Longleftrightarrow\ & f(x) \in g^{\leftarrow}(A) \\
\Longleftrightarrow\ & x \in f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(A)) \\
\underset{97 \text{ p. } 124}{\Longleftrightarrow}\ & x \in (f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow})(A)
\end{aligned}
$$

Donc $x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(A) \iff x \in (f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow})(A)$

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a donc $(g \circ f)^{\leftarrow}(A) = (f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow})(A)$.

Finalement, $\boxed{(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}}$.

**CQFD**.

## Proposition 141 (Image réciproque et "jectivité")

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

(1) $f^{\leftarrow}$ est injective si et seulement si $f$ est surjective

(2) $f^{\leftarrow}$ est surjective si et seulement si $f$ est injective

(3) $f^{\leftarrow}$ est bijective si et seulement si $f$ est bijective
Dans ce cas là, $(f^{\leftarrow})^{-1} = (f^{-1})^{\leftarrow}$.

### *Démonstration*

♦ (1)

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{\leftarrow}$ est injective.

Donc pour toutes parties $B$ et $B'$ de $F$, si $f^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}(B')$, alors $B = B'$.

Donc par contraposition, pour toutes parties $B$ et $B'$ de $F$, si $B \neq B'$, alors $f^{\leftarrow}(B) \neq f^{\leftarrow}(B')$.

En particulier, pour toute partie $B$ de $F$, si $B \neq \emptyset$, alors $f^{\leftarrow}(B) \neq f^{\leftarrow}(\emptyset) \underset{135 \text{ p. } 183}{=} \emptyset$.

Soit $y \in F$.

Considérons $B = \{y\}$.

Ainsi, $B \neq \emptyset$.

Donc $f^{\leftarrow}(B) \neq \emptyset$.

Donc il existe $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $f(x) \in B$.

Or, $B = \{y\}$.

Donc $f(x) \in \{y\}$.

Donc $f(x) = y$.

Donc pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Donc $f$ est surjective.

Donc si $f^{\leftarrow}$ est injective, alors $f$ est surjective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est surjective.

Soit $B$ une partie de $F$.

Supposons que $B \neq \emptyset$.

Il existe donc $y \in B$.

Or, $f$ est surjective par hypothèse.

Donc il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Donc comme $y \in B$, on a $f(x) \in B$.

Donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $f^{\leftarrow}(B) \neq \emptyset$.

Donc $B \neq \emptyset \Rightarrow f^{\leftarrow}(B) \neq \emptyset$.

Donc $f^{\leftarrow}(B) = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$ par contraposition.

Ceci étant vrai pour toute partie $B$ de $F$, on peut affirmer que

$\forall B \subseteq F, \left(f^{\leftarrow}(B) = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset\right) \quad (\star)$.

Soient $C$ et $C'$ deux parties de $F$.

Supposons que $f^{\leftarrow}(C) = f^{\leftarrow}(C')$.

En particulier, $f^{\leftarrow}(C) - f^{\leftarrow}(C') = \emptyset$ d'après la prop. 24 p. 27.

Donc $f^{\leftarrow}(C - C') = \emptyset$ d'après la prop. 24 p. 27.

Donc $C - C' = \emptyset$ d'après $(\star)$.

Donc $C \subseteq C'$ d'après la prop. 24 p. 27.

On montre de même que $C' \subseteq C$ :

On a $f^{\leftarrow}(C) = f^{\leftarrow}(C')$.

Donc $f^{\leftarrow}(C') = f^{\leftarrow}(C)$.

Donc $f^{\leftarrow}(C') - f^{\leftarrow}(C) = \emptyset$.

Donc $f^{\leftarrow}(C' - C) = \emptyset$.

Donc $C' - C = \emptyset$.

Donc $C' \subseteq C$.

Ainsi, on a $C = C'$.

Donc si $f^{\leftarrow}(C) = f^{\leftarrow}(C')$, alors $C = C'$.

Ceci étant vrai pour toutes parties $C$ et $C'$ de $F$, on peut affirmer que $f^{\leftarrow}$ est injective.

Donc si $f$ est surjective, alors $f^{\leftarrow}$ est injective.

Finalement, $\boxed{f^{\leftarrow} \text{ est injective si et seulement si } f \text{ est surjective}}$.

♦ (2)

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{\leftarrow}$ est surjective.

Soient $a$ et $b$ dans $E$.

Supposons que $f(a) = f(b)$.

Comme $f^{\leftarrow}$ est surjective, il existe $B \subseteq F$ telle que $f^{\leftarrow}(B) = \{b\}$.

Donc $b \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $f(b) \in B$.

Or, $f(a) = f(b)$ par hypothèse.

Donc $f(a) \in B$.

Donc $a \in f^{\leftarrow}(B)$.

Or, $f^{\leftarrow}(B) = \{b\}$.

Donc $a \in \{b\}$.

Donc $a = b$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Ceci étant vrai pour tout $a$ et $b$ de $E$, on peut dire que $f$ est injective.

Donc si $f^{\leftarrow}$ est surjective, alors $f$ est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est injective.

Soit $A \subseteq E$.

Posons $B = f^{\rightarrow}(A)$.

Posons $C = f^{\leftarrow}(B)$.

Ainsi, $C = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A))$.

Montrons que $A \subseteq C$.

Soit $a \in E$.

Supposons que $a \in A$.

Donc $f(a) \in f^{\rightarrow}(A)$.

Donc $f(a) \in B$.

Donc $a \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $a \in C$.

Donc si $a \in A$, alors $a \in C$.

Ceci étant vrai pour tout $a \in E$, on peut dire que $A \subseteq C$.

Montrons que $C \subseteq A$.

Soit $c \in E$.

Supposons que $c \in C$.

Donc $c \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $f(c) \in B$.

Donc $f(c) \in f^{\rightarrow}(A)$.

Il existe donc $a \in A$ tel que $f(c) = f(a)$.

Or, $f$ est injective.

Donc $c = a$.

Donc $c \in A$.

Donc si $c \in C$, alors $c \in A$.

Ceci étant vrai pour tout $c \in E$, on peut dire que $C \subseteq A$.

Finalement, on a $A = C$.

Or, on avait $C = f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $A = f^{\leftarrow}(B)$.

Ainsi, il existe $B \subseteq F$ telle que $A = f^{\leftarrow}(B)$.

Ceci étant vrai pour tout $A \subseteq E$, on peut dire que $f^{\leftarrow}$ est surjective.

Donc si $f$ est injective, alors $f^{\leftarrow}$ est surjective.

Finalement, $\boxed{f^{\leftarrow} \text{ est surjective si et seulement si } f \text{ est injective}}$.

♦ (3) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& f^{\leftarrow} \text{ est bijective} \\
\iff & f^{\leftarrow} \text{ est injective et } f^{\leftarrow} \text{ est surjective} \\
\underset{(1)}{\iff} & f \text{ est surjective et } f^{\leftarrow} \text{ est surjective} \\
\underset{(2)}{\iff} & f \text{ est surjective et } f \text{ est injective} \\
\iff & f \text{ est bijective}
\end{aligned}$$

On a donc l'équivalence $\boxed{f^{\leftarrow} \text{ est bijective} \iff f \text{ est bijective}}$.

De plus, on a alors $f^{\leftarrow} \circ (f^{-1})^{\leftarrow} \underset{140 \text{ p. } 187}{=} (f \circ f^{-1})^{\leftarrow} = \mathrm{id}_F{}^{\leftarrow} \underset{134 \text{ p. } 182}{=} \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$.

Donc $f^{\leftarrow} \circ (f^{-1})^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(F)}$.

Donc $\boxed{(f^{\leftarrow})^{-1} = (f^{-1})^{\leftarrow}}$.

**CQFD**.

## 4.3 Images directes et images réciproques

**Proposition 142 (Image directe de l'image réciproque)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$.

(1) $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(F)) = \mathrm{im}(f)$

(2) $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) = B \cap \mathrm{im}(f)$

(3) $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B$

(4) $\Big(\forall D \subseteq F, f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(D)) = D\Big) \iff f$ est surjective

Autrement dit, $f^{\leftarrow}$ est une inverse à droite de $f^{\rightarrow}$.

(5) $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A))) = f^{\rightarrow}(A)$

(6) $f^{\rightarrow}(A \cup f^{\leftarrow}(B)) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cup B$

(7) $f^{\rightarrow}(A \cap f^{\leftarrow}(B)) = f^{\rightarrow}(A) \cap B$

(8) $B \subseteq f^{\rightarrow}(A) \iff \exists C \subseteq A, f^{\rightarrow}(C) = B$

*Démonstration*

♦ (1)

On a $f^{\leftarrow}(F) = E$ d'après la prop. 136 p. 183.

Donc $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(F)) = f^{\rightarrow}(E) = \mathrm{im}(f)$.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(F)) = \mathrm{im}(f)}$.

♦ (2)

Raisonnons par doubles inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B))$.

Il existe donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$ tel que $y = f(x)$.

Ainsi, $y \in \text{im}(f)$.

Or, $x \in f^{\leftarrow}(B)$ donc $f(x) \in B$.

Comme $y = f(x)$, on a $y \in B$.

Donc $y \in B$ et $y \in \text{im}(f)$.

Donc $y \in B \cap \text{im}(f)$.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B))$, alors $y \in B \cap \text{im}(f)$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut dire que $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B \cap \text{im}(f)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in B \cap \text{im}(f)$.

En particulier, $y \in \text{im}(f)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

De plus, $y \in B$, donc on a $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc comme $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B))$.

Donc si $y \in B \cap \text{im}(f)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B))$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut dire que $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) \supseteq B \cap \text{im}(f)$.

Finalement, $\boxed{f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) = B \cap \text{im}(f)}$.

♦ $(3)$

En utilisant $(2)$, on a immédiatement le résultat :

$f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) = B \cap \text{im}(f) \subseteq B$ d'après la prop. 22 p. 23.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B}$.

♦ $(4)$

Raisonnons par doubles implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall D \subseteq F, f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(D)) = D$.

En particulier, pour $D = F$, on obtient $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(F)) = F$.

Or, $(1)$ nous dit que $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(F)) = \text{im}(f)$.

Donc $\text{im}(f) = F$.

Donc $f$ est surjective.

Ainsi, si $\forall D \subseteq F, f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(D)) = D$, alors $f$ est surjective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est surjective.

On a alors $\text{im}(f) = F$.

La proposition (2) nous dit que $\forall D \subseteq F, f^{\to}(f^{\leftarrow}(D)) = D \cap \text{im}(f)$.

On peut donc dire que $\forall D \subseteq F, f^{\to}(f^{\leftarrow}(D)) = D \cap F$.

Or, $\forall D \subseteq F, D \cap F = D$ d'après la prop. 22 p. 23.

Donc $\forall D \subseteq F, f^{\to}(f^{\leftarrow}(D)) = D$.

Donc si $f$ est surjective, alors $\forall D \subseteq F, f^{\to}(f^{\leftarrow}(D)) = D$.

Finalement, $\boxed{\left(\forall D \subseteq F, f^{\to}(f^{\leftarrow}(D)) = D\right) \iff f \text{ est surjective}}$.

♦ (5)

Posons $B = f^{\to}(A)$.

On a alors $f^{\to}(f^{\leftarrow}(f^{\to}(A))) = f^{\to}(f^{\leftarrow}(B)) \underset{(2)}{=} B \cap \text{im}(f) = f^{\to}(A) \cap \text{im}(f)$.

Or $A \subseteq E$ donc $f^{\to}(A) \subseteq f^{\to}(E)$ par croissance de $f^{\to}$.

Or, $f^{\to}(E) = \text{im}(f)$.

Donc $f^{\to}(A) \subseteq \text{im}(f)$.

Donc $f^{\to}(A) \cap \text{im}(f) = f^{\to}(A)$ d'après la prop. 22 p. 23.

Donc $\boxed{f^{\to}(f^{\leftarrow}(f^{\to}(A))) = f^{\to}(A)}$.

♦ (6)

On a $f^{\to}(A \cup f^{\leftarrow}(B)) \underset{128 \text{ p. } 163}{=} f^{\to}(A) \cup f^{\to}(f^{\leftarrow}(B)) \underset{(3)}{\subseteq} f^{\to}(A) \cup B$.

Donc $\boxed{f^{\to}(A \cup f^{\leftarrow}(B)) \subseteq f^{\to}(A) \cup B}$.

♦ (7)

Raisonnons par doubles inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

On a $f^{\to}(A \cap f^{\leftarrow}(B)) \underset{128 \text{ p. } 163}{\subseteq} f^{\to}(A) \cap f^{\to}(f^{\leftarrow}(B)) \underset{(3)}{\subseteq} f^{\to}(A) \cap B$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in f^{\to}(A) \cap B$.

En particulier, $y \in f^{\to}(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.

Or, on a $y \in B$ donc $a \in f^{\leftarrow}(B)$.

Ainsi, $a \in A$ et $a \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $a \in A \cap f^{\leftarrow}(B)$.

Donc comme $y = f(x)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(A \cap f^{\leftarrow}(B))$.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}(A) \cap B$, alors $y \in f^{\rightarrow}(A \cap f^{\leftarrow}(B))$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut dire que $f^{\rightarrow}(A \cap f^{\leftarrow}(B)) \supseteq f^{\rightarrow}(A) \cap B$.

Finalement, $\boxed{f^{\rightarrow}(A \cap f^{\leftarrow}(B)) = f^{\rightarrow}(A) \cap B}$.

♦ (8)

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $B \subseteq f^{\rightarrow}(A)$.

En particulier, on a $B \cap f^{\rightarrow}(A) = B$ d'après la prop. 22 p. 23.

Posons $C := A \cap f^{\leftarrow}(B)$.

On a donc $f^{\rightarrow}(C) = f^{\rightarrow}(A \cap f^{\leftarrow}(B)) \underset{(7)}{=} f^{\rightarrow}(A) \cap B = B$.

Donc $f^{\rightarrow}(C) = B$.

Et comme $C = A \cap f^{\leftarrow}(B)$, on a $C \subseteq A$ d'après la prop. 22 p. 23.

Donc si $B \subseteq f^{\rightarrow}(A)$, alors il existe $C \subseteq A$ tel que $f^{\rightarrow}(C) = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe $C \subseteq A$ tel que $f^{\rightarrow}(C) = B$.

Comme $C \subseteq A$, on a $f^{\rightarrow}(C) \subseteq f^{\rightarrow}(A)$ par croissance de $f^{\rightarrow}$.

Donc $B \subseteq f^{\rightarrow}(A)$.

Donc s'il existe $C \subseteq A$ tel que $f^{\rightarrow}(C) = B$, alors $B \subseteq f^{\rightarrow}(A)$.

Finalement, $\boxed{B \subseteq f^{\rightarrow}(A) \iff \exists C \subseteq A, f^{\rightarrow}(C) = B}$.

**CQFD**.

## Proposition 143 (Image réciproque de l'image directe)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.
Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$.

(1) $A \subseteq f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A)\right)$

(2) $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(E)\right) = E$

(3) $\Big(\forall C \subseteq E, C = f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(C)\right)\Big) \iff f$ est injective
Autrement dit, $f^{\leftarrow}$ est une inverse à gauche de $f^{\rightarrow}$.

(4) $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}(B)\right)\right) = f^{\leftarrow}(B)$

(5) $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A) \cup B\right) \supseteq A \cup f^{\leftarrow}(B)$

(6) $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A) \cap B\right) \supseteq A \cap f^{\leftarrow}(B)$

(7) $A \subseteq f^{\leftarrow}(B) \iff f^{\rightarrow}(A) \subseteq B$

*Démonstration*

♦ (1)

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in A$.

On a donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(A)$.

Donc $x \in f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A)\right)$.

Donc si $x \in A$, alors $x \in f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A)\right)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut affirmer que $\boxed{A \subseteq f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A)\right)}$.

♦ (2)

On sait que $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(E)\right) \subseteq E$ par définition de $f^{\leftarrow}$.

On sait que $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(E)\right) \supseteq E$ d'après $(1)$.

On a donc $\boxed{f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(E)\right) = E}$.

♦ (3)

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall C \subseteq E, C = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$.

Soient $a$ et $b$ dans $E$.

Supposons que $f(a) = f(b)$.

Posons $C = \{b\}$.

On a donc $f^{\rightarrow}(C) = f^{\rightarrow}\Big(\{b\}\Big) = \Big\{f(b)\Big\}$ d'après la prop. 126 p. 161.

Or, comme $f(a) = f(b)$, on a $f(a) \in \Big\{f(b)\Big\}$.

Donc $f(a) \in f^{\rightarrow}(C)$.

Donc $a \in f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$.

Or, $f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C)) = C$ par hypothèse.

Donc $a \in C$.

Or, $C = \{b\}$.

Donc $a \in \{b\}$.

Donc $a = b$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Ceci étant vrai pour tout $a$ et $b$ de $E$, on peut dire que $f$ est injective.

Donc si $\forall C \subseteq E, C = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$, alors $f$ est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f$ est injective.

Soit $C \subseteq E$.

Montrons que $C \supseteq f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$.

On a donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(C)$.

Il existe donc $c \in C$ tel que $f(x) = f(c)$.

Or, $f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = c$.

Donc $x \in C$.

Donc si $x \in f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$, alors $x \in C$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut affirmer que $C \supseteq f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$.

Or, on sait que $C \subseteq f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$ d'après $(1)$.

Donc $C = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$.

Ceci étant vrai pour tout $C \subseteq E$, on peut dire que $\forall C \subseteq E, C = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$.

Donc si $f$ est injective, alors $\forall C \subseteq E, C = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))$.

Finalement, $\boxed{\Big(\forall C \subseteq E, C = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(C))\Big) \iff f \text{ est injective}}$.

♦ (4)

Montrons que $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}(B)\right)\right) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}(B)\right)\right)$.

On a donc $f(x) \in f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}(B)\right)$.

Il existe donc $a \in f^{\leftarrow}(B)$ tel que $f(x) = f(a)$.

Comme $a \in f^{\leftarrow}(B)$, on a $f(a) \in B$.

Or, $f(x) = f(a)$.

Donc $f(x) \in B$.

Donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc si $x \in f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}(B)\right)\right)$, alors $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut affirmer que $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}(B)\right)\right) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

Or, on a $f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}(B)\right)\right) \supseteq f^{\leftarrow}(B)$ d'après $(1)$.

Donc $\boxed{f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(f^{\leftarrow}(B)\right)\right) = f^{\leftarrow}(B)}$.

♦ (5)

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in A \cup f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $f(x) \in f^{\rightarrow}\left(A \cup f^{\leftarrow}(B)\right)$.

Or, $f^{\rightarrow}\left(A \cup f^{\leftarrow}(B)\right) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cup B$.

Donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(A) \cup B$.

Donc $x \in f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A) \cup B\right)$.

Donc si $x \in A \cup f^{\leftarrow}(B)$, alors $x \in f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A) \cup B\right)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut affirmer que $\boxed{f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A) \cup B\right) \supseteq A \cup f^{\leftarrow}(B)}$.

♦ (6)

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in A \cap f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $f(x) \in f^{\rightarrow}\left(A \cap f^{\leftarrow}(B)\right)$.

Or, $f^{\rightarrow}\left(A \cap f^{\leftarrow}(B)\right) = f^{\rightarrow}(A) \cap B$ d'après la prop. 142 p. 192.

Donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(A) \cap B$.

Donc $x \in f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A) \cap B\right)$.

Donc si $x \in A \cap f^{\leftarrow}(B)$, alors $x \in f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A) \cap B\right)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut dire que $\boxed{f^{\leftarrow}\left(f^{\rightarrow}(A) \cup B\right) \supseteq A \cup f^{\leftarrow}(B)}$.

♦ (7)

Raisonnons par doubles implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $A \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

On a donc $f^{\rightarrow}(A) \subseteq f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B))$ par croissance de $f^{\rightarrow}$.

Or, on a $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) \subseteq B$ d'après la prop. 142 p. 192.

Donc $f^{\rightarrow}(A) \subseteq B$ par transitivité de $\subseteq$.

Donc si $A \subseteq f^{\leftarrow}(B)$, alors $f^{\rightarrow}(A) \subseteq B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f^{\rightarrow}(A) \subseteq B$.

On a donc $f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)) \subseteq f^{\leftarrow}(B)$ par croissance de $f^{\leftarrow}$.

Or, on a $A \subseteq f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A))$ d'après $(1)$.

Donc $A \subseteq f^{\leftarrow}(B)$ par transitivité de $\subseteq$.

Donc si $f^{\rightarrow}(A) \subseteq B$, alors $A \subseteq f^{\leftarrow}(B)$.

Finalement, $\boxed{A \subseteq f^{\leftarrow}(B) \iff f^{\rightarrow}(A) \subseteq B}$.

**CQFD**.

## Proposition 144 (Bijection réciproque, image directe et réciproque)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides tels que $\mathcal{B}\text{ij}(E \to F) \neq \emptyset$.
Soit $f : E \to F$ une bijection.

Les propositions 133 page 179 et 141 page 188 nous assure qu'alors $f^{\to}$ et $f^{\leftarrow}$ sont bijectives.
On a alors les égalités suivantes :

(1) $\left(f^{\to}\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^{\to}$

(2) $\left(f^{\leftarrow}\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^{\leftarrow}$

(3) $\left(f^{\to}\right)^{-1} = f^{\leftarrow}$

Autrement dit, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\text{ij}(E \to F) \arrow[r, leftrightarrow, "-1"] \arrow[d, "\to"] \arrow[dr, "\leftarrow"] & \mathcal{B}\text{ij}(F \to E) \arrow[d, "\to"] \\
\mathcal{B}\text{ij}\left(\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)\right) \arrow[r, leftrightarrow, "-1"] & \mathcal{B}\text{ij}\left(\mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)\right)
\end{tikzcd}$$

La proposition nous dit que le diagramme est **commutatif** : seuls le départ et l'arrivée importent, pas le chemin.

*Démonstration*

♦ (1)
Illustrons tout d'abord la proposition par le sous-diagramme commutatif correspondant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\text{ij}(E \to F) \arrow[r, "-1"] \arrow[d, "\to"] & \mathcal{B}\text{ij}(F \to E) \arrow[d, "\to"] \\
\mathcal{B}\text{ij}\left(\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)\right) \arrow[r, "-1"] & \mathcal{B}\text{ij}\left(\mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)\right)
\end{tikzcd}$$

Ainsi, partir à droite puis en bas, revient à d'abord partir en bas puis partir à droite.
La propriété est démontrée lors de la proposition 132 page 175.

♦ (2)
C'est la proposition 141 page 188.

♦ (3)

Illustrons tout d'abord la proposition par le sous-diagramme commutatif correspondant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}\text{ij}(E \to F) \arrow[d, "\to"] \arrow[dr, "\leftarrow"] & \\
\mathcal{B}\text{ij}\left(\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)\right) \arrow[r, "-1"] & \mathcal{B}\text{ij}\left(\mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)\right)
\end{tikzcd}$$

Ainsi, aller en diagonale revient à descendre puis aller à droite sur le diagramme.

Démontrons-le :

On est donc dans le cas où $f$, $f^{\to}$ et $f^{\leftarrow}$ sont bijectives.

En particulier, $f$ est injective.

Donc $\forall C \subseteq FE, f^{\leftarrow}\left(f^{\to}(C)\right) = C$ d'après la prop. 143 p. 196.

Donc $\forall C \subseteq E, (f^{\leftarrow} \circ f^{\to})(C) = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}(C)$.

Donc $f^{\leftarrow} \circ f^{\to} = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Donc $\boxed{(f^{\to})^{-1} = f^{\leftarrow}}$.

**CQFD**.

## 4.4 Définition par image directe

### Notation

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

Soit $f : E \to F$. Soit $A$ une partie de $E$.

Soit $P$ une assertion pouvant dépendre d'un paramètre.

L'ensemble $f^{\to}\Big(A \cap \{x \in E \mid P(x)\}\Big)$ sera parfois noté $\{f(x) \mid x \in A \text{ et } P(x)\}$.

On dit alors qu'on a l'a **défini par image directe**.

On pourra donc considérer $\{f(x) \mid x \in A\}$ en prenant pour $P$ une assertion toujours vraie, ou encore considérer $\{f(x) \mid P(x)\}$ en prenant $A = E$.

**Remarque 7**

Avec cette nouvelle notation, on peut réécrire plus naturellement les ensembles suivants :

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides.

$(1)$ $E \times F = \{(x;y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$

$(2)$ $\Delta_E = \{(x;x) \mid x \in E\}$ où $\Delta_E$ est la diagonale de $E^2$

$(3)$ ${}^t\Gamma = \{(y;x) \mid (x;y) \in \Gamma\}$ où $\Gamma$ est un graphe de $E$ dans $F$

$(4)$ $f^{\rightarrow}(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ où $f : E \to F$ et $A \subseteq E$

# 5 Restriction, corestriction et coprolongement

## 5.1 Restriction

**Proposition 145 (Restriction d'une application)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soit $A$ une partie de $E$.

$(1)$ La restriction $f_{|A}$ de $f$ à $A$ est une application.

$(2)$ On a $\begin{array}{rccc} f_{|A}: & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

$(3)$ On a $f_{|E} = f$

$(4)$ Pour toute partie $C$ de $A$, on a $\left(f_{|A}\right)_{|C} = f_{|C}$.

*Démonstration*

♦ $(1)$

Soit $\Gamma$ le graphe de $f$.

On a donc $f = \Big((E;F);\Gamma\Big)$.

Par définition, on a $f_{|A} = \Big((A;F);\Gamma \cap (A \times F)\Big)$.

• Montrons tout d'abord que $f_{|A}$ est fonctionnelle.
On sait que $f_{|A} \preccurlyeq f$ d'après la prop. 56 p. 66.
Or, $f$ est une application donc $f$ est fonctionnelle.
Donc $f_{|A}$ est fonctionnelle d'après la prop. 92 p. 114.

• Montrons à présent que dom $\left(f_{|A}\right) = A$.
On a dom $\left(f_{|A}\right) = \left\{x \in A \,\middle|\, \exists y \in F, x f_{|A} y\right\}$.
Ainsi, on sait déjà que dom $\left(f_{|A}\right) \subseteq A$.
Montrons que dom $\left(f_{|A}\right) \supseteq A$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \in A$.
Comme $A \subseteq E$, on a $x \in E$.
Posons $y_0 = f(x)$.
On a donc $x f y_0$.
Donc $(x; y_0) \in \Gamma$.
Or, $x \in A$ et $y_0 \in F$.
Donc $(x; y_0) \in A \times F$.
Ainsi, on a $(x; y_0) \in \Gamma$ et $(x; y_0) \in A \times F$.
Donc $(x; y_0) \in \Gamma \cap (A \times F)$.
Donc $x f_{|A} y_0$.
Donc il existe $y \in F$ tel que $x f_{|A} y$.
Donc $x \in$ dom $\left(f_{|A}\right)$.

Ainsi, si $x \in A$, alors $x \in$ dom $\left(f_{|A}\right)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut dire que dom $\left(f_{|A}\right) \supseteq A$.
Ainsi, on a dom $\left(f_{|A}\right) = A$.

Finalement, $\boxed{f_{|A} \text{ est une application}}$.

♦ (2)
Premièrement, comme $f_{|A} = \Big((A; F); \Gamma \cap (A \times F)\Big)$, on a bien $f_{|A} : A \to F$.
Il nous reste donc à montrer que pour tout $x \in A$, on a $f_{|A}(x) = f(x)$.
Si $A = \emptyset$, c'est immédiat.
Supposons donc que $A \neq \emptyset$.

Soit $x \in A$.
Posons $y = f_{|A}(x)$.
On a donc $x f_{|A} y$.

Donc $(x;y) \in \Gamma \cap (A \times F)$.

En particulier, $(x;y) \in \Gamma$.

Donc $xfy$.

Donc $y = f(x)$.

Or, $y = f_{|A}(x)$.

Donc $f_{|A}(x) = f(x)$.

Donc pour tout $x \in A$, on a $f_{|A}(x) = f(x)$.

Donc $\boxed{\begin{array}{rccc} f_{|A} : & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}}$.

♦ (3)

On a $f_{|E} = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix} = f$ d'après $(2)$.

Donc $\boxed{f_{|E} = f}$.

♦ (4)

Soit $C$ une partie de $A$.

On a alors $\left(f_{|A}\right)_{|C} \underset{(2)}{=} \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f_{|A}(x) \end{pmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix} \underset{(2)}{=} f_{|C}$.

Donc $\boxed{\left(f_{|A}\right)_{|C} = f_{|C}}$.

## Proposition 146 (Restriction et images)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soit $A$ une partie de $E$.

$(1)$ Pour toute partie $C$ de $A$, on ${f_{|A}}^{\rightarrow}(C) = f^{\rightarrow}(C)$.

$(2)$ On a $\operatorname{im}\left(f_{|A}\right) = f^{\rightarrow}(A)$.

$(3)$ En particulier, on a $\operatorname{im}\left(f_{|A}\right) \subseteq \operatorname{im}(f)$.

$(4)$ Pour toute partie $B$ de $F$, on a ${f_{|A}}^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}(B) \cap A$.

*Démonstration*

♦ (1) Soit $C$ une partie de $A$.

On a alors ${f_{|A}}^{\rightarrow}(C) = \left\{ f_{|A}(c) \mid c \in C \right\} \underset{145 \text{ p. } 202}{=} \{f(c) \mid c \in C\} = f^{\rightarrow}(C)$.

Donc $\boxed{{f_{|A}}^{\rightarrow}(C) = f^{\rightarrow}(C)}$.

♦ (2)

On a $\operatorname{im}\left(f_{|A}\right) = {f_{|A}}^{\rightarrow}(A) \underset{(1)}{=} f^{\rightarrow}(A)$.

Donc $\boxed{\operatorname{im}\left(f_{|A}\right) = f^{\rightarrow}(A)}$.

♦ (3)

On a $\operatorname{im}\left(f_{|A}\right) \underset{(2)}{=} f^{\rightarrow}(A) \underset{127 \text{ p. } 162}{\subseteq} \operatorname{im}(f)$.

Donc $\boxed{\operatorname{im}\left(f_{|A}\right) \subseteq \operatorname{im}(f)}$.

♦ (4)

Soit $B$ une partie de $F$.

On a alors ${f_{|A}}^{\leftarrow}(B) = \left\{ x \in A \,\middle|\, f_{|A}(x) \in B \right\} \underset{145 \text{ p. } 202}{=} \{x \in A \mid f(x) \in B\}$

$= \{x \in E \mid f(x) \in B\} \cap A = f^{\leftarrow}(B) \cap A$.

Donc $\boxed{{f_{|A}}^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}(B) \cap A}$.

**CQFD**.

## Proposition 147 (Restriction de l'identité)

Soit $E$ un ensemble non vide et $A$ une partie de $E$.

La restriction de l'identité sur $E$ à $A$ est tout simplement l'injection canonique de $A$ dans $E$.

*Démonstration*

On a $(\mathrm{id}_E)_{|A} = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{pmatrix}_{|A} = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{pmatrix}$

**CQFD**.

## Proposition 148 (Restriction, prolongement et "jectivité")

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.
Soit $A$ une partie de $E$.

**Injectivité**

$(1)$ Si $f$ est injective, alors $f_{|A}$ est injective.

$(2)$ S'il existe au moins un prolongement de $f$ injectif, alors $f$ est injective.

**Surjectivité**

$(3)$ $f_{|A}$ est surjective si et seulement si $f^{\rightarrow}(A) = F$.

$(4)$ Si $f_{|A}$ est surjective, alors $f$ est surjective.

$(5)$ Si $f$ est surjective, alors tout prolongement de $f$ est surjectif.

**Remarque** :
• Ce n'est pas parce que $f_{|A}$ est injective que $f$ l'est.
En effet, imaginons que $A = \{1\}$, $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3\}$.
On a donc $f : \{1; 2\} \to \{3\}$.
On a évidemment $f(1) = 3 = f(2)$ mais $1 \neq 2$ donc $f$ n'est pas injective.
Cependant, $f_{|A}$ est bien injective.

• Ce n'est pas parce que $f$ est surjective que $f_{|A}$ l'est.
En effet, imaginons que $A = \{1\}$, $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3; 4\}$.
On a donc $f : \{1; 2\} \to \{3; 4\}$.
Imaginons aussi que $f(1) = 3$ et $f(2) = 4$. $f$ est ainsi surjective.
Mais $f_{|A}$ n'atteint jamais $4$ et n'est donc pas surjective.

*Démonstration*

♦ $(1)$

Supposons que $f$ est injective.

Soient $a_1$ et $a_2$ dans $A$.

Supposons que $f_{|A}(a_1) = f_{|A}(a_2)$.

On a donc $f(a_1) = f(a_2)$ d'après la prop. 145 p. 202.

Or, $f$ est injective par hypothèse.

Donc $a_1 = a_2$.

Donc si $f_{|A}(a_1) = f_{|A}(a_2)$, alors $a_1 = a_2$.

Ceci étant vrai pour tout $a_1$ et $a_2$ dans $A$, on peut dire que $f_{|A}$ est injective.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ est injective, alors } f_{|A} \text{ est injective}}$.

♦ (2)

Supposons qu'il existe un prolongement de $f$ qui soit injectif.

Il existe donc $\mathcal{E}$ un sur-ensemble de $E$ et $g : \mathcal{E} \to F$ injective telle que $g_{|E} = f$.

Donc d'après $(1)$, comme $g$ est injective, $g_{|E}$ est injective.

Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

♦ (3)

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & f_{|A} \text{ est surjective} \\ \iff \; & \operatorname{im}\left(f_{|A}\right) = F \\ \iff \; & f^{\rightarrow}(A) = F \text{ puisque } \operatorname{im}\left(f_{|A}\right) = f^{\rightarrow}(A) \text{ d'après la prop. 146 p. 204} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f_{|A} \text{ est surjective si et seulement si } f^{\rightarrow}(A) = F}$.

♦ (4)

Supposons que $f_{|A}$ est surjective.

Donc $f^{\rightarrow}(A) = F$ d'après $(3)$.

Or, $f^{\rightarrow}(A) \subseteq \operatorname{im}(f)$ d'après la prop. 127 p. 162.

Donc $F \subseteq \operatorname{im}(f)$.

Or, on a $\operatorname{im}(f) \subseteq F$ par définition de $\operatorname{im}(f)$.

Donc $\operatorname{im}(f) = F$.

Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

♦ (5)

Supposons que $f$ soit surjective.

Soient $\mathcal{E}$ un sur-ensemble de $E$ et $g : \mathcal{E} \to F$ un prolongement de $f$.

On a donc $g_{|E} = f$.

Or, $f$ est surjective.

Donc $g_{|E}$ est surjective.

Donc $g$ est surjective d'après $(4)$.

**CQFD**.

## 5.2 Corestriction

**Proposition 149 (Corestriction d'une application)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.
Soit $B$ une partie de $F$.

$(1)$ Si $f^{|B}$ est une application, alors $\begin{array}{rccc} f^{|B} : & E & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

$(2)$ La corestriction $f^{|B}$ de $f$ à $B$ est une application si et seulement si $\mathrm{im}(f) \subseteq B$.

$(3)$ On a $f^{|F} = f$.

$(4)$ Pour toute partie $D$ de $B$ telle que $\mathrm{im}(f) \subseteq D$, on a $\left(f^{|B}\right)^{|D} = f^{|D}$.

*Démonstration*

♦ $(1)$

Supposons que $f^{|B}$ est une application.
Soit $\Gamma$ le graphe de $f$.
Par définition, on a $f^{|B} = \Big((E; B); \Gamma \cap (E \times B)\Big)$.
On a donc bien $f^{|B} : E \to B$.
Il reste donc à montrer que pour tout $x \in E$, on a $f^{|B}(x) = f(x)$.

> Soit $x \in E$.
> Posons $y = f^{|B}(x)$.
> On a donc $x f^{|B} y$.
> On a donc $(x; y) \in \Gamma \cap (E \times B)$.
> Or, on a $\Gamma \cap (E \times B) \subseteq \Gamma$ d'après la prop. 22 p. 23.
> Donc $(x; y) \in \Gamma$.
> Donc $x f y$.
> Donc $y = f(x)$.
> Donc $f^{|B}(x) = f(x)$.

Donc pour tout $x \in E$, on a $f^{|B}(x) = f(x)$.

Finalement, on a bien $\boxed{\begin{array}{rccc} f^{|B} : & E & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}}$.

♦ (2)

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{|B}$ est une application.

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in \text{im}(f)$.

Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Or, $(1)$ nous dit que $f(x) = f^{|B}(x)$.

Donc $y = f^{|B}(x)$.

Donc $y \in \text{im}\left(f^{|B}\right)$.

Or, $\text{im}\left(f^{|B}\right) \subseteq B$ par définition.

Donc $y \in B$.

Donc si $y \in \text{im}(f)$, alors $y \in B$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut dire que $\text{im}(f) \subseteq B$.

Donc si $f^{|B}$ est une application, alors $\text{im}(f) \subseteq B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\text{im}(f) \subseteq B$.

Soit $\Gamma$ le graphe de $f$.

Par définition, on a $f^{|B} = \Big((E;B);\Gamma \cap (E \times B)\Big)$.

• Montrons tout d'abord que $f^{|B}$ est fonctionnelle.

On sait que $f^{|B} \preccurlyeq f$ d'après la prop. 56 p. 66.

Or, $f$ est une application donc $f$ est fonctionnelle.

Donc $f^{|B}$ est fonctionnelle d'après la prop. 92 p. 114.

• Montrons à présent que $\text{dom}\left(f^{|B}\right) = E$.

On a $\text{dom}\left(f^{|B}\right) = \left\{x \in E \;\middle|\; \exists y \in B, x f^{|B} y\right\}$.

Ainsi, on sait déjà que $\text{dom}\left(f^{|B}\right) \subseteq E$.

Montrons que $\text{dom}\left(f^{|B}\right) \supseteq E$.

Soit $x \in E$.

Posons $y_0 = f(x)$.

On a donc $x f y_0$.

Donc $(x;y_0) \in \Gamma$.

De plus, comme $y_0 = f(x)$, on a $y_0 \in \text{im}(f)$.

Or, $\text{im}(f) \subseteq B$ par hypothèse.

Donc $y_0 \in B$.

Ainsi, comme $x \in E$, on a $(x; y_0) \in E \times B$.
Donc $(x; y_0) \in \Gamma$ et $(x; y_0) \in E \times B$.
Donc $(x; y_0) \in \Gamma \cap (E \times B)$.
Donc $x f^{|B} y_0$.
Donc il existe $y \in B$ tel que $x f^{|B} y$.
Donc $x \in \operatorname{dom}\left(f^{|B}\right)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut dire que $\operatorname{dom}\left(f^{|B}\right) \supseteq E$.
Ainsi, on a $\operatorname{dom}\left(f^{|B}\right) = E$.

Donc $f^{|B}$ est bien une application.
Donc si $\operatorname{im}(f) \subseteq B$, alors $f^{|B}$ est une application.

Finalement, $\boxed{f^{|B} \text{ est une application si et seulement si } \operatorname{im}(f) \subseteq B}$.

♦ (3)
Comme $\operatorname{im}(f) \subseteq F$ par définition, $f^{|F}$ est bien une application d'après (2).
On a les égalités suivantes : $f^{|F} \underset{(1)}{=} \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix} = f$.

Donc $\boxed{f^{|F} = f}$.

♦ (4)
Soit $D$ une partie de $B$ telle que $\operatorname{im}(f) \subseteq D$.
Donc $f^{|D}$ est une application d'après (2).

De plus, comme $D \subseteq B$, on a $\operatorname{im}(f) \subseteq B$.
Donc $f^{|B}$ est aussi une application d'après (2).

Soit $y \in F$.
Supposons que $y \in \operatorname{im}\left(f^{|B}\right)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que $y = f^{|B}(x)$.
Or, $f^{|B}(x) = f(x)$ d'après (1).
Donc $y = f(x)$.
Donc $y \in \operatorname{im}(f)$.
Donc si $y \in \operatorname{im}\left(f^{|B}\right)$, alors $y \in \operatorname{im}(f)$.
Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut dire $\operatorname{im}\left(f^{|B}\right) \subseteq \operatorname{im}(f)$.
Or $\operatorname{im}(f) \subseteq D$.

Donc $\operatorname{im}\left(f^{|B}\right) \subseteq D$.
Donc $\left(f^{|B}\right)^{|D}$ est une application d'après $(2)$.

On a alors $\left(f^{|B}\right)^{|D} \underset{(1)}{=} \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & D \\ x & \longmapsto & f^{|B}(x) \end{array}\right) \underset{(1)}{=} \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & D \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right) \underset{(1)}{=} f^{|D}$.

Donc $\boxed{\left(f^{|B}\right)^{|D} = f^{|D}}$.
**CQFD**.

## Proposition 150 (Corestriction et images)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.
Soit $B$ une partie de $F$ telle que $\operatorname{im}(f) \subseteq B$.

$(1)$ Pour toute partie $A$ de $E$, on a $\left(f^{|B}\right)^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}(A)$.

$(2)$ En particulier, on a $\operatorname{im}\left(f^{|B}\right) = \operatorname{im}(f)$.

$(3)$ Pour toute partie $D$ de $B$, on a $\left(f^{|B}\right)^{\leftarrow}(D) = f^{\leftarrow}(D)$.

*Démonstration*

♦ $(1)$
Soit $A$ une partie de $E$.
Soit $y \in F$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & y \in \left(f^{|B}\right)^{\rightarrow}(A) \\ \iff & \exists a \in A, y = f^{|B}(a) \\ \underset{149 \text{ p. } 208}{\iff} & \exists a \in A, y = f(a) \\ \iff & y \in f^{\rightarrow}(A) \end{aligned}$$

Donc $y \in \left(f^{|B}\right)^{\rightarrow}(A) \iff y \in f^{\rightarrow}(A)$
Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on peut dire que $\boxed{\left(f^{|B}\right)^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}(A)}$.

♦ $(2)$
On a donc $\operatorname{im}\left(f^{|B}\right) = f^{|B\rightarrow}(E) \underset{(1)}{=} f^{\rightarrow}(E) = \operatorname{im}(f)$.

Donc $\boxed{\operatorname{im}\left(f^{|B}\right) = \operatorname{im}(f)}$.

♦ $(3)$

Soit $D$ une partie de $B$.

Soit $x \in E$.

On a les équivalences suivantes :

$$x \in f^{|B^{\leftarrow}}(D)$$
$$\iff f^{|B}(x) \in D$$
$$\underset{149 \text{ p. } 208}{\iff} f(x) \in D$$
$$\iff x \in f^{\leftarrow}(D)$$

On a donc $x \in f^{|B^{\leftarrow}}(D) \iff x \in f^{\leftarrow}(D)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut dire que $\boxed{\left(f^{|B}\right)^{\leftarrow}(D) = f^{\leftarrow}(D)}$.

**CQFD**.

## Proposition 151 (Corestriction et "jectivité")

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soit $B$ une partie de $F$ telle que $\mathrm{im}(f) \subseteq B$.

**Injectivité**

$(1)$ $f$ est injective si et seulement si $f^{|B}$ est injective.

**Surjectivité**

$(2)$ $f^{|B}$ est surjective si et seulement si $\mathrm{im}(f) = B$.

**Bijectivité**

$(3)$ $f$ est injective si et seulement si $f^{|\mathrm{im}(f)}$ est bijective.

*Démonstration*

♦ $(1)$

Raisonnons par doubles implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f$ est injective.

Soient $x$ et $x'$ dans $E$.

Supposons que $f^{|B}(x) = f^{|B}(x')$.

On sait que $f^{|B}(x) = f(x)$ et $f^{|B}(x') = f(x')$ d'après la prop. 149 p. 208.

Donc $f(x) = f^{|B}(x) = f^{|B}(x') = f(x')$.

Donc $f(x) = f(x')$.

Or, $f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = x'$.

Donc si $f^{|B}(x) = f^{|B}(x')$, alors $x = x'$.

Donc $\forall x \in E, \forall x' \in E, \left(f^{|B}(x) = f^{|B}(x') \Rightarrow x = x'\right)$.

Donc $f^{|B}$ est injective.

Donc si $f$ est injective, alors $f^{|B}$ est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f^{|B}$ est injective.

Soient $x$ et $x'$ dans $E$.

Supposons que $f(x) = f(x')$.

On sait que $f^{|B}(x) = f(x)$ et $f^{|B}(x') = f(x')$ d'après la prop. 149 p. 208.

Donc $f^{|B}(x) = f(x) = f(x') = f^{|B}(x')$.

Donc $f^{|B}(x) = f^{|B}(x')$.

Or, $f^{|B}$ est injective par hypothèse.

Donc $x = x'$.

Donc si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.

Donc $\forall x \in E, \forall x' \in E, \left(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\right)$.

Donc $f$ est injective.

Donc si $f^{|B}$ est injective, alors $f$ est injective.

Finalement, $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } f^{|B} \text{ est injective}}$.

♦ (2)

Raisonnons par doubles implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{|B}$ est surjective.

On a donc $\mathrm{im}\left(f^{|B}\right) = B$.

Or, on a $\mathrm{im}\left(f^{|B}\right) = \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 150 p. 211.

Donc $\mathrm{im}(f) = B$.

Donc si $f^{|B}$ est surjective, alors $\mathrm{im}(f) = B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\mathrm{im}(f) = B$.

Or, on a $\mathrm{im}\left(f^{|B}\right) = \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 150 p. 211.

Donc on a $\mathrm{im}\left(f^{|B}\right) = B$.

Donc $f^{|B}$ est surjective.
Donc si $\text{im}(f) = B$, alors $f^{|B}$ est surjective.

Finalement, $\boxed{f^{|B} \text{ est surjective si et seulement si } \text{im}(f) = B}$.

♦ $(3)$
Raisonnons par doubles implications :
$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f$ est injective.
Alors $f^{|\text{im}(f)}$ est injective d'après $(1)$.
Or, $f^{|\text{im}(f)}$ est surjective d'après $(2)$.
Donc $f^{|\text{im}(f)}$ est bijective.
Donc si $f$ est injective, alors $f^{|\text{im}(f)}$ est bijective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f^{|\text{im}(f)}$ est bijective. En particulier, $f^{|\text{im}(f)}$ est injective.
Donc $f$ est injective d'après $(1)$.
Donc si $f^{|\text{im}(f)}$ est bijective, alors $f$ est injective.

Finalement, $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } f^{|\text{im}(f)} \text{ est bijective}}$.
**CQFD**.

## Proposition 152 (Corestriction et graphe)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.
Soit $B$ une partie de $F$ telle que $\text{im}(f) \subseteq B$.

La corestriction $f^{|B}$ a le même graphe que $f$.

*Démonstration*

Soit $\Gamma$ le graphe de $f$.
Alors par définition, le graphe de $f^{|B}$ est $\Gamma \cap (E \times B)$.
Il faut donc montrer que $\Gamma = \Gamma \cap (E \times B)$.
Autrement dit, il suffit donc de montrer que $\Gamma \subseteq E \times B$ d'après la prop. 22 p. 23.

Soit $z$ un ensemble.
Supposons que $z \in \Gamma$.

Or, par définition de $\Gamma$, on a $\Gamma \subseteq E \times F$.

Donc $z \in E \times F$.

Il existe donc $x \in E$ et $y \in F$ tel que $z = (x;y)$.

Comme $z \in \Gamma$, on a donc $(x;y) \in \Gamma$.

Comme $\Gamma$ est le graphe de $f$, on a $xfy$ et donc $y = f(x)$.

On a donc $y \in \text{im}(f)$.

Or, $\text{im}(f) \subseteq B$ par hypothèse.

Donc $y \in B$.

Donc $x \in E$ et $y \in B$.

Donc $(x;y) \in E \times B$.

Donc $z \in E \times B$.

Donc si $z \in \Gamma$, alors $z \in E \times B$.

Donc $\forall z, \Big(z \in \Gamma \Rightarrow z \in E \times B\Big)$.

Donc $\Gamma \subseteq E \times B$.

**CQFD**.

### 5.3 Coprolongement

**Proposition 153 (Coprolongement d'une application)**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soit $\mathcal{F}$ un sur-ensemble de $F$.

Il existe un unique coprolongement de $f$ à $\mathcal{F}$ qui soit une application.

*Démonstration*

• Commençons par démontrer l'existence.

Soit $\begin{array}{rccc} g: & E & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

On sait par définition de $f$ que $f : E \to F$.

Donc pour tout $x \in E$, on a $f(x) \in F$.

Or, pour tout $x \in E$, on a $g(x) = f(x)$ par définition de $g$.

Donc pour tout $x \in E$, on a $g(x) \in F$.

Donc $\text{im}(g) \subseteq F$.

On peut donc corestreindre $g$ à $F$.

On a alors $g^{|F} = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right)^{|F} \underset{149 \text{ p. } 208}{=} \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} = f.$

On a donc $g^{|F} = f$.

Donc $g$ est un coprolongement de $f$ à $\mathcal{F}$.

Or, $g$ est une application par définition.

Donc $\boxed{\text{il existe un coprolongement de } f \text{ à } \mathcal{F} \text{ qui soit une application.}}$

- Montrons à présent l'unicité.

Soient $g : E \to \mathcal{F}$ et $h : E \to \mathcal{F}$ deux applications qui coprolongent $f$ à $\mathcal{F}$.

Soit $x \in E$.

On sait que $g$ et $h$ coprolongent $f$.

Donc $f$ est la corestriction de $g$ et de $h$ à $F$.

Donc $g^{|F} = f = h^{|F}$ donc $g^{|F} = h^{|F}$.

Donc $g^{|F}(x) = h^{|F}(x)$.

Mais par définition de la corestriction, $g(x) = g^{|F}(x)$ et $h(x) = h^{|F}(x)$.

Donc $g(x) = h(x)$.

Donc $\forall x \in E, g(x) = h(x)$.

Donc $g = h$ d'après la prop. 94 p. 118.

$\boxed{\text{D'où l'unicité}}$.

**CQFD**.

## Définition 62 (Le coprolongement d'une application)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soit $\mathcal{F}$ un sur-ensemble de $F$.

La proposition 153 page 215 nous assure qu'il existe un unique coprolongement de $f$ à $\mathcal{F}$ qui soit une application.

Nous dirons que c'est **le coprolongement** de $f$ à $\mathcal{F}$. Nous le noterons $f^{\dagger\mathcal{F}}$.

Ainsi, on a $\begin{array}{cccc} f^{\dagger\mathcal{F}} : & E & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

On peut donc adapter les propriétés précédentes dans le cas du coprolongement.

## Proposition 154 (Coprolongement et images)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.
Soit $\mathcal{F}$ un sur-ensemble de $F$.

(1) Pour toute partie $A$ de $E$, on a $\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\to}(A) = f^{\to}(A)$.

(2) En particulier, $\operatorname{im}\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right) = \operatorname{im}(f)$.

(3) Pour toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$, on a $\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\leftarrow}(\mathcal{B}) = f^{\leftarrow}(F \cap \mathcal{B})$.

(4) En particulier, pour toute partie $B$ de $F$, on a $\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}(B)$.

*Démonstration*

Notons $g = f^{\dagger\mathcal{F}}$.
On sait que $g$ est un coprolongement de $f$.
Donc $f$ est la corestriction de $g$ à $F$.
Donc $f = g^{|F}$.

♦ (1)

Soit $A$ une partie de $E$. On a alors $\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\to}(A) = g^{\to}(A) \underset{150 \text{ p. } 211}{=} \left(g^{|F}\right)^{\to}(A) = f^{\to}(A)$.

Donc $\boxed{\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\to}(A) = f^{\to}(A)}$.

♦ (2)

On a $\operatorname{im}\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right) = \left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\to}(E) \underset{(1)}{=} f^{\to}(E) = \operatorname{im}(f)$.

Donc $\boxed{\operatorname{im}\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right) = \operatorname{im}(f)}$.

♦ (3) Soit $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{F}$.

Soit $x \in E$.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& x \in \left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\leftarrow}(\mathcal{B}) \\
\iff\ & f^{\dagger\mathcal{F}}(x) \in \mathcal{B} \\
\iff\ & f(x) \in \mathcal{B} \text{ par définition de } f^{\dagger\mathcal{F}} \\
\iff\ & f(x) \in \mathcal{B} \text{ et } f(x) \in F \text{ par définition de } f \\
\iff\ & f(x) \in \mathcal{B} \cap F \\
\iff\ & x \in f^{\leftarrow}(\mathcal{B} \cap F)
\end{aligned}$$

Donc $x \in \left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\leftarrow}(\mathcal{B}) \iff x \in f^{\leftarrow}(\mathcal{B} \cap F)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on peut conclure que $\boxed{\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\leftarrow}(\mathcal{B}) = f^{\leftarrow}(\mathcal{B} \cap F)}$.

♦ $(4)$ Si $B$ est une partie de $F$, alors $B \cap F = B$ d'après la prop. 22 p. 23.

Alors $\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}(B \cap F) = f^{\leftarrow}(B)$.

Et donc $\boxed{\left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{\leftarrow}(B) = f^{\leftarrow}(B)}$.

**CQFD**.

## Proposition 155 (Coprolongement et injectivité)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soit $\mathcal{F}$ un sur-ensemble de $F$.

$f$ est injective si et seulement si $f^{\dagger\mathcal{F}}$ est injective.

*Démonstration*

Il suffit de remarquer que $f = \left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{|F}$ par définition d'un coprolongement (en toute généralité pour les relations binaires) puis d'appliquer la proposition 151 page 212.

**CQFD**.

## Proposition 156 (Coprolongement et graphe)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soit $\mathcal{F}$ un sur-ensemble de $F$.

Alors $f$ et son coprolongement $f^{\dagger\mathcal{F}}$ ont le même graphe.

*Démonstration*

Il suffit de remarquer que $f = \left(f^{\dagger\mathcal{F}}\right)^{|F}$ par définition d'un coprolongement (en toute généralité pour les relations binaires) puis d'appliquer la proposition 152 page 214.

**CQFD**.

Chapitre 4

# Familles

## Sommaire

# 1 Définition et notations

**Définition 63 (Famille)**

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $I$ un ensemble.

• On appelle **famille** d'éléments de $E$ **indexée** par $I$ toute application $x : I \to E$.

• Pour $i_0 \in I$ (si jamais $I \neq \emptyset$), on notera souvent $x_{i_0}$ plutôt que $x(i_0)$.

• $x$ sera alors parfois notée $(x_i)_{i \in I}$ ou $(x(i))_{i \in I}$.

• Pour $i_0 \in I$ (si jamais $I$ est non vide), on dira alors que $x_{i_0}$ est le **terme** de $(x_i)_{i \in I}$ d'indice $i_0$, ou encore le $i_0^{\text{ème}}$ terme de $(x_i)_{i \in I}$.

• On dira donc que $I$ est **l'ensemble des indices** de $(x_i)_{i \in I}$.

• On dit que les éléments de $\mathrm{im}(x)$ sont les **termes** de $(x_i)_{i \in I}$.

**Notation**

• Dans la notation $(x_i)_{i \in I}$, l'indice $i$ est dit **muet** : on peut le remplacer par tout autre caractère.
On a donc par exemple $(x_i)_{i \in I} = (x_j)_{j \in I} = (x_k)_{k \in I}$.
Il faut cependant prendre garde à ce que cet indice muet ne soit pas déjà utilisé au sein même d'une expression, au risque de faire des contre-sens !

• L'ensemble des familles de $E$ indexées par $I$ est tout simplement $\mathcal{A}(I \to E)$, parfois noté $E^I$.

• Pour rappel, on a introduit plus tôt la notation permettant de dire $\{x_i \mid i \in I\} = \mathrm{im}\Big((x_i)_{i \in I}\Big)$.

Rappelons au passage que si $I$ est vide ou si $E$ n'est pas vide, alors il existe au moins une application de $I$ dans $E$, et donc au moins une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

### Définition 64 (Famille associée à un ensemble)

Soit $E$ un ensemble non vide.

L'identité sur $E$, vu comme une famille, est parfois appelée la **famille associée** à $E$.
On aura donc $(x_i)_{i\in E} = \mathrm{id}_E$, et donc pour tout $i \in E$, on a $x_i = i$.

Il est donc à noter qu'on peut donc écrire $\mathrm{id}_E = (\mathrm{id}_E(x))_{x\in E} = (x)_{x\in E}$.

### Proposition 157 (Image d'une famille associée)

Soit $E$ un ensemble.
Soit $(x_i)_{i\in I}$ la famille associée à $E$.

On a alors $E = \{x_i \mid i \in I\}$.

*Démonstration*

Par définition, $(x_i)_{i\in I} = \mathrm{id}_E$, et $I = E$.
On a donc $E = \mathrm{im}\Big(\mathrm{id}_E\Big) = \mathrm{im}\Big((x_i)_{i\in E}\Big) = \{x_i \mid i \in E\} = \{x_i \mid i \in I\}$.
Donc $\boxed{E = \{x_i \mid i \in I\}}$.
**CQFD**.

### Définition 65 (Sous-famille et sur-famille)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $I$ un ensemble.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

$(1)$ On appelle **sous-famille** de $(A_i)_{i\in I}$ toute restriction de $(A_i)_{i\in I}$ à une partie de $I$.

$(2)$ On appelle **co-sous-famille** de $(A_i)_{i\in I}$ toute corestriction de $(A_i)_{i\in I}$ à une partie de $E$ qui contient son image.

$(3)$ On appelle **sur-famille** de $(A_i)_{i\in I}$ toute famille dont $(A_i)_{i\in I}$ est une sous-famille.

$(4)$ On appelle **co-sur-famille** de $(A_i)_{i\in I}$ toute famille dont $(A_i)_{i\in I}$ est une co-sous-famille.

## Proposition 158 (Autre écriture d'une sous-famille)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $I$ un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

Pour toute partie $J$ de $I$, on a $(A_i)_{i\in J} = \Big((A_i)_{i\in I}\Big)_{|J}$.

Autrement dit, $(A_i)_{i\in J}$ est la sous-famille indexée par $J$ de $(A_i)_{i\in I}$.

*Démonstration*

On a $(A_i)_{i\in J} = \begin{pmatrix} J & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & A_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & A_i \end{pmatrix}_{|J} = ((A_i)_{i\in I})_{|J}$.

**CQFD**.

**Remarque** :

Soient $E$ un ensemble non vide et $I$ un ensemble.

Soient $J$ une partie de $I$ et $\mathcal{E}$ un sur-ensemble de $E$.

Soit $F$ une partie de $E$ telle que $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq F$.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

On a alors :

- $\Big((A_i)_{i\in I}\Big)^{|F} \in F^I$
- $\Big((A_i)_{i\in I}\Big)^{\dagger\mathcal{E}} \in \mathcal{E}^I$
- $\Big((A_i)_{i\in I}\Big)_{|J} \in E^J$

## Définition 66 (Deux à deux distincts ou disjoints)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $I$ un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

$(1)$ On dit que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux distincts** si et seulement si $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j\Big)$.

$(2)$ On dit que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux disjoints** si et seulement si $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\Big)$.

## Proposition 159 (Deux à deux et sous-familles)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $I$ un ensemble.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

**Distincts**

$(1)$ Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux distincts, alors les termes de toute sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à distincts.

$(2)$ Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux distincts, alors les termes de toute co-sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à distincts.

$(3)$ Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux distincts, alors les termes de toute co-sur-famille de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à distincts.

**Disjoints**

$(4)$ Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints, alors les termes de toute sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à disjoints.

$(5)$ Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints, alors les termes de toute co-sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à disjoints.

$(6)$ Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints, alors les termes de toute co-sur-famille de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à disjoints.

*Démonstration*

**Distincts**

Supposons que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux distincts.

♦ $(1)$

Soit $(A_i)_{i\in J}$ une sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$.
On sait que $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j\Big)$.
Or par définition d'une sous-famille, on a $J \subseteq I$.

On a donc, $\forall i \in J, \forall j \in J, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j\Big)$.

Donc $\boxed{\text{les termes de } (A_i)_{i\in J} \text{ sont deux à deux distincts}}$.

♦ (2)

Soit $F$ une partie de $E$ telle que $\mathrm{im}\Big((A_i)_{i\in I}\Big) \subseteq F$.

Soit donc $(B_i)_{i\in I}$ la corestriction de $(A_i)_{i\in I}$ à $F$.

Ainsi, par définition d'une corestriction, pour tout $i \in I$, on a $B_i = A_i$.

Or, on a $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow B_i \neq B_j\Big)$.

Donc $\boxed{\text{les termes de } (B_i)_{i\in I} \text{ sont deux à deux distincts}}$.

♦ (3)

Soit $F$ un sur-ensemble de $E$.

Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $F$ indexée par $I$, qui est une co-sur-famille de $(A_i)_{i\in I}$.

Ainsi, par définition d'une co-sur-famille, pour tout $i \in I$, on a $B_i = A_i$.

Or, on a $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \neq A_j\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow B_i \neq B_j\Big)$.

Donc $\boxed{\text{les termes de } (B_i)_{i\in I} \text{ sont deux à deux distincts}}$.

**Disjoints**

Supposons que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.

♦ (4)

Soit $(A_j)_{j\in J}$ une sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$.

On sait par hypothèse que $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\Big)$.

Or, par définition d'une sous-famille, on a $J \subseteq I$.

Donc $\forall i \in J, \forall j \in J, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\Big)$.

Donc $\boxed{\text{les termes de } (A_j)_{j\in J} \text{ sont deux à deux disjoints}}$.

♦ (5)

Soit $F$ une partie de $E$ telle que $\mathrm{im}\Big((A_i)_{i\in I}\Big) \subseteq F$.

Soit $(B_i)_{i\in I}$ la corestriction de $(A_i)_{i\in I}$ à $F$.

Ainsi, par définition d'une corestriction, on a $\forall i \in I, B_i = A_i$.

On sait par hypothèse que $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\Big)$.

On peut donc dire que $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset\Big)$.

Donc $\boxed{\text{les termes de } (B_i)_{i\in I} \text{ sont deux à deux disjoints}}$.

♦ (6)

Soit $F$ un sur-ensemble de $E$.

Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $F$ indexée par $I$, qui est une co-sur-famille de $(A_i)_{i\in I}$.

Ainsi, par définition d'une co-sur-famille, pour tout $i \in I$, on a $B_i = A_i$.

On sait par hypothèse que $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset\Big)$.

On peut donc dire que $\forall i \in I, \forall j \in I, \Big(i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset\Big)$.

Donc $\boxed{\text{les termes de } (B_i)_{i\in I} \text{ sont deux à deux disjoints}}$.

**CQFD**.

## Proposition 160 (Changement d'indice dans une famille)

Soient $E$, $I$ et $J$ trois ensembles non vides.

Soit $A = (A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

Soit $f : J \to I$.

(1) Alors $A \circ f$ est une famille d'éléments de $E$ indexée par $J$.

Plus précisément, on a $A \circ f = (A_{f(j)})_{j\in J}$.

(2) On a toujours $\big\{A_{f(j)} \bigm| j \in J\big\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$.

(3) Si $f$ est une surjection, alors $\big\{A_{f(j)} \bigm| j \in J\big\} = \{A_i \mid i \in I\}$.

(4) En particulier, si $f$ est une bijection, alors $\big\{A_{f(j)} \bigm| j \in J\big\} = \{A_i \mid i \in I\}$.

*Démonstration*

(1) On sait que $A$ est une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

Cela veut dire que $A : I \to E$. Comme on a $f : J \to I$, on a donc bien $A \circ f : J \to E$.

Donc $A \circ f$ est bien une famille d'éléments de $E$ indexée par $J$.

De plus, pour tout $j \in J$, on a $(A \circ f)(j) = A(f(j)) = A_{f(j)}$.

On a donc bien $A \circ f = (A_{f(j)})_{j\in J}$.

(2) Pour tout $j \in J$, on $A_{f(j)} = A(f(j)) \underset{97 \text{ p. } 124}{=} (A \circ f)(j)$.

On a donc $\big\{A_{f(j)} \bigm| j \in J\big\} = \{(A \circ f)(j) \mid j \in J\} = \mathrm{im}(A \circ f)$.

De plus, $\{A_i \mid i \in I\} = \{A(i) \mid i \in I\} = \mathrm{im}(A)$.

Or, on a $\mathrm{im}(A \circ f) \subseteq \mathrm{im}(A)$ d'après la prop. 99 p. 126.

On a donc $\boxed{\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}}$.

3 Comme dit juste au dessus, on a $\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} = \mathrm{im}(A \circ f)$.

De même, on a $\{A_i \mid i \in I\} = \mathrm{im}(A)$.

Or, si $f$ est surjective, alors $\mathrm{im}(A \circ f) \subseteq \mathrm{im}(A)$ d'après la prop. 118 p. 153.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ est surjective, alors } \left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}}$.

4 Il suffit simplement de se rappeler que si $f$ est une bijection, alors $f$ est surjective.

On applique alors 3.

**CQFD**.

## 2 Réunion d'une famille d'ensembles

Nous allons à présent généraliser la notion de réunion vu dans le premier chapitre.

### Définition 67 (Réunion d'une famille d'ensembles)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $I$ un ensemble.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $E$.

On appelle **réunion** de $(A_i)_{i \in I}$ l'ensemble $\bigcup \{A_i \mid i \in I\}$.

On le note $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

### Notation

Ici aussi, dans $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, le $i$ est **muet** : on peut le remplacer par n'importe quel caractère.

Ainsi, on a $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{j \in I} A_j = \bigcup\limits_{k \in I} A_k$.

Ici encore, il faut veiller au fait que cette variable muette ne soit pas déjà utilisée au sein d'une même expression, au risque de produire un contre-sens !

### Proposition 161 (Autre notation de la réunion d'un ensemble)

Soit $E$ un ensemble.

On a alors $\bigcup E = \bigcup\limits_{A \in E} A$.

*Démonstration*

On a $E = \text{im}\,(\text{id}_E) = \{\text{id}_E(A) \mid A \in E\} = \{A \mid A \in E\}$.

Donc $E = \{A \mid A \in E\}$.

Donc $\bigcup E = \bigcup \{A \mid A \in E\}$.

Or, $\bigcup \{A \mid A \in E\} = \bigcup\limits_{A \in E} A$ par définition.

Donc $\boxed{\bigcup E = \bigcup\limits_{A \in E} A}$.

**CQFD**.

## Proposition 162 (Caractérisation de la réunion)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $I$ un ensemble.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

Soit $x$ un ensemble.

On a alors $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ si et seulement si $\exists i \in I, x \in A_i$.

*Démonstration*

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

On a donc $x \in \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$.

Il existe donc $B \in \{A_i \mid i \in I\}$ tel que $x \in B$.

Or, $\{A_i \mid i \in I\} = \text{im}\Big((A_i)_{i \in I}\Big)$.

Donc $B \in \text{im}\Big((A_i)_{i \in I}\Big)$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $B = A(i_0) = A_{i_0}$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.

Ainsi, si $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, alors $\exists i \in I, x \in A_i$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.

Or, $A_{i_0} = A(i_0) \in \text{im}\Big((A_i)_{i \in I}\Big)$.

Il existe donc $B \in \text{im}\Big((A_i)_{i \in I}\Big)$ tel que $x \in B$.

Or, $\{A_i \mid i \in I\} = \text{im}\Big((A_i)_{i \in I}\Big)$.

Donc il existe $B \in \{A_i \mid i \in I\}$ tel que $x \in B$.

Donc $x \in \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$.

Donc $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Donc si $\exists i \in I, x \in A_i$, alors $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Finalement, $\boxed{x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \text{ si et seulement si } \exists i \in I, x \in A_i}$.

**CQFD**.

## Proposition 163 (Réunions simples)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $I$ un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

(1) Si $I = \emptyset$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$.

(2) S'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = A_{i_0}$.

(3) S'il existe $i_1$ et $i_2$ dans $I$ tels que $I = \{i_1; i_2\}$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = A_{i_1} \cup A_{i_2}$.

*Démonstration*

♦ (1)

Supposons que $I = \emptyset$.

On a donc $\neg\Big(\exists i \in I\Big)$.

En particulier, $\forall x, \neg(\exists i \in I, x \in A_i)$.

Or, $\forall x, \Big(x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i\Big)$.

Donc $\forall x, x \notin \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Donc $\boxed{\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \emptyset}$ d'après la prop. 7 p. 8.

♦ (2)

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$.

Notons $A = (A_i)_{i\in I}$.

On a $\{A_i \mid i \in I\} = \text{im}\Big((A_i)_{i\in I}\Big) = \text{im}(A) = A^{\rightarrow}(I) = A^{\rightarrow}\Big(\{i_0\}\Big) \underset{126 \text{ p. } 161}{=} \Big\{A(i_0)\Big\} = \Big\{A_{i_0}\Big\}$.

Ainsi, on a $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\{A_i \mid i \in I\} = \bigcup\Big\{A_{i_0}\Big\}$.

Or, $\bigcup\Big\{A_{i_0}\Big\} = A_{i_0}$ d'après la prop. 15 p. 16.

Et donc $\boxed{\bigcup\limits_{i\in I} A_i = A_{i_0}}$.

♦ (3)

Supposons qu'il existe $i_1$ et $i_2$ dans $I$ tel que $I = \{i_1; i_2\}$.

Notons $A = (A_i)_{i\in I}$.

On a $\{A_i \mid i \in I\} = \mathrm{im}\Big((A_i)_{i\in I}\Big) = \mathrm{im}(A) = A^{\rightarrow}(I) = A^{\rightarrow}\Big(\{i_1; i_2\}\Big)$

$\underset{126\text{ p. }161}{=} \Big\{A(i_1); A(i_2)\Big\} = \Big\{A_{i_1}; A_{i_2}\Big\}$.

Donc $\{A_i \mid i \in I\} = \Big\{A_{i_1}; A_{i_2}\Big\}$.

Donc $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup \Big\{A_{i_1}; A_{i_2}\Big\}$.

Or, $\bigcup \Big\{A_{i_1}; A_{i_2}\Big\} = A_{i_1} \cup A_{i_2}$ par définition de $\cup$.

Donc $\boxed{\bigcup\limits_{i\in I} A_i = A_{i_1} \cup A_{i_2}}$.

**CQFD**.

## Proposition 164 (Réunion, minimalité et croissance)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soient $I$ et $F$ deux ensembles.

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ des familles d'éléments de $E$ indexées par $I$.

(1) Pour tout $i_0 \in I$, on a $A_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

(2) Si $\forall i \in I, A_i \subseteq F$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subseteq F$.

On dit ainsi que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est le **minimum**, au sens de l'inclusion, parmi les ensembles qui contiennent tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.

(3) S'il existe $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I, A_i \subseteq A_{i_0}$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = A_{i_0}$.

(4) Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} B_i$.

On dit que $\bigcup$ est **compatible** avec l'inclusion.

(5) Pour toute sous-famille $(A_j)_{j\in J}$ de $(A_i)_{i\in I}$, on a $\bigcup\limits_{j\in J} A_j \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

*Démonstration*

♦ (1)

Soit $i_0 \in I$.

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in A_{i_0}$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $x \in A_{i_0}$, alors $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Ainsi, $\forall x, \left(x \in A_{i_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Donc $\boxed{A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i}$.

♦ (2)

Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq F$.

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, $A_{i_0} \subseteq F$ par hypothèse.

Donc $x \in F$.

Donc si $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $x \in F$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow x \in F\right)$.

Donc $\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq F}$.

♦ (3)

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I, A_i \subseteq A_{i_0}$.

Alors en prenant $F = A_{i_0}$ dans $(2)$, on obtient $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$.

De plus, on sait que $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ d'après $(1)$.

Donc $\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_0}}$.

♦ (4)

Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 162 p. 227

Or, $A_{i_0} \subseteq B_{i_0}$ par hypothèse.

Donc $x \in B_{i_0}$.

Or, $B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ d'après $(1)$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} B_i$.

Donc si $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $x \in \bigcup_{i \in I} B_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{i\in I} B_i\right)$.

Donc $\boxed{\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} B_i}$.

♦ (5)

Soit $(A_j)_{j\in J}$ une sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$.

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup\limits_{j\in J} A_j$.

Il existe donc $j_0 \in J$ tel que $x \in A_{j_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, $(A_j)_{j\in J}$ est une sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$.

Donc $J \subseteq I$.

Donc $j_0 \in I$.

Il existe donc $j_0 \in I$ tel que $x \in A_{j_0}$.

Donc $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $x \in \bigcup\limits_{j\in J} A_j$, alors $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup\limits_{j\in J} A_j \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i\right)$.

Donc $\boxed{\bigcup\limits_{j\in J} A_j \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i}$.

**CQFD**.

## Proposition 165 (Associativité de la réunion)

Soit $E$ un ensemble. Soient $I$ et $M$ deux ensembles.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

Soit $(J_m)_{m\in M}$ une famille de parties de $I$ indexée par $M$.

Si $I = \bigcup\limits_{m\in M} J_m$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{m\in M} \left(\bigcup\limits_{i\in J_m} A_i\right)$.

On appelle cette propriété **l'associativité** de la réunion.

*Démonstration*

Supposons que $I = \bigcup\limits_{m\in M} J_m$.

Raisonnons par doubles inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, $I = \bigcup_{m \in M} J_m$ par hypothèse.

Donc $i_0 \in \bigcup_{m \in M} J_m$.

Donc il existe $m_0 \in M$ tel que $i_0 \in J_{m_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Ainsi, $x \in A_{i_0}$ et $i_0 \in J_{m_0}$.

Donc il existe $i \in J_{m_0}$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in J_{m_0}} A_i$ d'après la prop. 162 p. 227.

Il existe donc $m \in M$ tel que $x \in \bigcup_{i \in J_m} A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{m \in M} \left( \bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $x \in \bigcup_{m \in M} \left( \bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$.

Donc $\forall x, \left( x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcup_{m \in M} \left( \bigcup_{i \in J_m} A_i \right) \right)$.

Donc $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{m \in M} \left( \bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{m \in M} \left( \bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$.

Il existe donc $m_0 \in M$ tel que $x \in \bigcup_{i \in J_{m_0}} A_i$ d'après la prop. 162 p. 227.

Il existe donc $i_0 \in J_{m_0}$ tel que $x \in A_{i_0}$.

Ainsi, on a $i_0 \in J_{m_0}$ et $x \in A_{i_0}$.

Il existe donc $m \in M$ tel que $i_0 \in J_m$.

Donc $i_0 \in \bigcup_{m \in M} J_m$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, $I = \bigcup_{m \in M} J_m$ par hypothèse.

Donc $i_0 \in I$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $x \in \bigcup_{m \in M} \left( \bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$, alors $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Ainsi, $\forall x, \left( x \in \bigcup_{m \in M} \left( \bigcup_{i \in J_m} A_i \right) \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} A_i \right)$.

Donc $\bigcup_{m \in M} \left( \bigcup_{i \in J_m} A_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Finalement, $\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{m \in M} \left( \bigcup_{i \in J_m} A_i \right)}$.

**CQFD**.

## Proposition 166 (Changement d'indice dans une réunion)

Soient $E$, $I$ et $J$ trois ensembles non vides. Soit $f : J \to I$.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

1 On a toujours $\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

2 Si $f$ est surjective, alors $\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

3 En particulier, si $f$ est bijective, alors $\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

*Démonstration*

1 On sait qu'on a $\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 160 p. 225.
On a donc $\bigcup\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} \subseteq \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ par croissance de $\bigcup$.
Or, $\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\}$ et $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ par définition de $\bigcup$.
Donc $\boxed{\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i}$.

2 Supposons que $f$ est surjective.
On a alors $\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} = \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 160 p. 225.
Donc $\bigcup\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\} = \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$.
Or, $\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup\left\{A_{f(j)} \mid j \in J\right\}$ et $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ par définition de $\bigcup$.
Donc $\boxed{\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i}$.

3 Supposons que $f$ est bijective.
Alors $f$ est surjective.
Donc d'après 3, on a $\boxed{\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i}$.

**CQFD.**

**Notation**

Soit $E$ un ensemble non vide. Soient $I$ et $J$ deux ensembles.

Soit $(f(z))_{z\in I\times J}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I\times J$.

• On notera parfois $(f(i;j))_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ ou $(f(i;j))_{(i;j)\in I\times J}$ à la place de $(f(z))_{z\in I\times J}$.

• On notera parfois $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$ ou $\bigcup\limits_{(i;j)\in I\times J} f(i;j)$ à la place de $\bigcup\limits_{z\in I\times J} f(z)$.

Ici encore, $i$ et $j$ sont dites **muets** : on peut les remplacer par n'importe quels autres caractères (celui qui remplace $i$ doit bien entendu être distinct de celui qui remplace $j$).

Ainsi, on a par exemple $(f(i;j))_{\substack{i\in I\\ j\in J}} = (f(a;b))_{\substack{a\in I\\ b\in J}} = (f(c;d))_{\substack{c\in I\\ d\in J}}$.

De même, on a $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j) = \bigcup\limits_{\substack{a\in I\\ b\in J}} f(a;b) = \bigcup\limits_{\substack{c\in I\\ d\in J}} f(c;d)$.

Encore une fois, on veillera à ce que ces caractères muets ne soient pas déjà utilisés au sein d'une même expression, au risque de dire un contre-sens !

## Proposition 167 (Double réunions)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soient $I$ et $J$ deux ensembles.

Soit $f(i;j)_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ une famille d'éléments de $E$ indicée par $I\times J$.

$(1)$ On a alors $\bigcup\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J} f(i;j) = \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j) = \bigcup\limits_{j\in J}\bigcup\limits_{i\in I} f(i;j)$.

$(2)$ De plus, pour tout ensemble $x$, on a

$x\in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$ si et seulement s'il existe $i\in I$ et $j\in J$ tels que $x\in f(i;j)$.

*Démonstration*

**Démonstration de** $(1)$.

Introduisons les applications $\begin{array}{rccc}\pi_g: & I\times J & \longrightarrow & I\\ & (i;j) & \longmapsto & i\end{array}$ et $\begin{array}{rccc}\pi_d: & I\times J & \longrightarrow & J\\ & (i;j) & \longmapsto & j\end{array}$

♦ Commençons par prouver que $\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

Soit $x$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j)$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in \bigcup_{j\in J} f(i_0;j)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Il existe donc $j_0 \in J$ tel que $x \in f(i_0;j_0)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si l'on pose $k_0 = (i_0;j_0)$, on a $x \in f(k_0)$.

Donc il existe $k \in I \times J$ tel que $x \in f(k)$.

Donc $x \in \bigcup_{k\in I\times J} f(k)$.

Donc $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

Donc si $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j)$, alors $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcup_{k\in I\times J} f(k)$.

Donc il existe $k_0 \in I \times J$ tel que $x \in f(k_0)$.

Or, pour tout $k \in I \times J$, on a $k = (\pi_g(k);\pi_d(k))$.

Donc $x \in f(\pi_g(k_0);\pi_d(k_0))$.

Donc en posant $i_0 = \pi_g(k_0)$ et $j_0 = \pi_d(k_0)$, on a $x \in f(i_0;j_0)$.

Donc il existe $j \in J$ tel que $x \in f(i_0;j)$.

Donc $x \in \bigcup_{j\in J} f(i_0;j)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc il existe $i \in I$ tel que $x \in \bigcup_{j\in J} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$, alors $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j)$.

Finalement, $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j)$ si et seulement si $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

Ceci étant vrai pour tout $x$, on peut dire que $\boxed{\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)}$.

♦ Prouvons à présent que $\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j) = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} f(i;j)$.

Soit $x$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcup_{k\in I\times J} f(k)$.

Donc il existe $k_0 \in I \times J$ tel que $x \in f(k_0)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, pour tout $k \in I \times J$, on a $k = (\pi_g(k); \pi_d(k))$.

Donc $x \in f(\pi_g(k_0); \pi_d(k_0))$.

Donc en posant $i_0 = \pi_g(k_0)$ et $j_0 = \pi_d(k_0)$, on a $x \in f(i_0; j_0)$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in f(i; j_0)$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I} f(i; j_0)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Il existe donc $j \in J$ tel que $x \in \bigcup_{i\in I} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} f(i;j)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$, alors $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} f(i;j)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} f(i;j)$.

Il existe donc $j_0 \in J$ tel que $x \in \bigcup_{i\in I} f(i; j_0)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in f(i_0; j_0)$ d'après la prop. 162 p. 227.

En posant $k_0 = (i_0; j_0)$, on a $x \in f(k_0)$.

Donc il existe $k \in I \times J$ tel que $x \in f(k)$.

Donc $x \in \bigcup_{k\in I\times J} f(k)$.

Donc $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

Donc si $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} f(i;j)$, alors $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

Finalement, $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$ si et seulement si $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} f(i;j)$.

Ceci étant vrai pour tout $x$, on peut affirmer que $\boxed{\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j) = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} f(i;j)}$.

**Démonstration de** $(2)$.

Soit $x$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

Or, d'après $(1)$, on a $\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j)$.

Donc il existe $i \in I$ tel que $x \in \bigcup_{j\in J} f(i;j)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc il existe $j \in J$ tel que $x \in f(i;j)$.

Ainsi, il existe $i \in I$ et $j \in J$ tels que $f(i;j)$.

Donc $\boxed{\text{si } x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j), \text{ alors il existe } i \in I \text{ et } j \in J \text{ tels que } f(i;j)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$ tels que $x \in f(i_0;j_0)$.

Il existe donc $j \in J$ tel que $x \in f(i_0;j)$.

Donc $x \in \bigcup_{j\in J} f(i_0;j)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in \bigcup_{j\in J} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, $\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} f(i;j) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$ d'après $(1)$.

Donc $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

Donc $\boxed{\text{s'il existe } i \in I \text{ et } j \in J \text{ tels que } x \in f(i;j), \text{ alors } x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)}$.

**CQFD**.

**Proposition 168 (Réunion et opérations)**

Soit $E$ un ensemble non vide. Soient $I$ et $J$ deux ensembles.

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles d'éléments de $E$, indexées respectivement par $I$ et $J$.

### Intersection

$(1)$ **Distributivité de l'intersection sur la réunion** :

Pour tout $F \in E$, on a $F \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (F \cap A_i)$.

$(2)$ **Double distributivité de l'intersection sur la réunion** :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j).$$

### Produit cartésien

$(3)$ **Distributivité à gauche du produit cartésien sur la réunion** :

Pour tout $F \in E$, on a $F \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (F \times A_i)$.

$(4)$ **Distributivité à droite du produit cartésien sur la réunion** :

Pour tout $F \in E$, on a $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcup_{i\in I} (A_i \times F)$.

$(5)$ **Double distributivité du produit cartésien sur la réunion** :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \times B_j).$$

### Réunion

$(6)$ On suppose ici $I$ et $J$ non vide.

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cup B_j).$$

*Démonstration*

♦ $(1)$

Soit $F \in E$.

Raisonnons par doubles inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

On a donc $x \in F$ et $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Donc $x \in F$ et il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $x \in F$ et $x \in A_{i_0}$.

Donc $x \in F \cap A_{i_0}$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in F \cap A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} (F \cap A_i)$d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $x \in F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$, alors $x \in \bigcup_{i \in I} (F \cap A_i)$.

Donc $\forall x, \left(x \in F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} (F \cap A_i)\right)$.

Donc $F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (F \cap A_i)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{i \in I} (F \cap A_i)$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in F \cap A_{i_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $x \in F$ et $x \in A_{i_0}$.

Donc $x \in F$ et il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in F$ et $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $x \in F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Donc si $x \in \bigcup_{i \in I} (F \cap A_i)$, alors $x \in F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{i \in I} (F \cap A_i) \Rightarrow x \in F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right)$.

Donc $\bigcup_{i \in I} (F \cap A_i) \subseteq F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Finalement, $\boxed{F \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} (F \cap A_i)}$.

♦ (2)

On a les égalités suivantes :

$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ par commutativité de $\cap$

$$= \bigcup_{i\in I}\left(\left[\bigcup_{j\in J} B_j\right]\cap A_i\right) \text{ d'après } (1)$$

$$= \bigcup_{i\in I}\left(A_i \cap \left[\bigcup_{j\in J} B_j\right]\right) \text{ par commutativité de } \cap$$

$$= \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i\cap B_j) \text{ d'après } (1)$$

$$= \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i\cap B_j) \text{ d'après la prop. 167 p. 234.}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i\cap B_j)}$.

♦ (3)

Soit $F \in E$.

Soit $z$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $z \in F \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Il existe donc $y \in F$ et $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tels que $z = (y; x)$.

On a donc $z = (y; x)$ et $y \in F$ et $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

On a donc $z = (y; x)$ et $y \in F$ et il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $z = (y; x)$ et $y \in F$ et $x \in A_{i_0}$.

Donc $z \in F \times A_{i_0}$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $z \in F \times A_i$.

Donc $z \in \bigcup_{i\in I}(F \times A_i)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $z \in F \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, alors $z \in \bigcup_{i\in I}(F \times A_i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $z \in \bigcup_{i\in I}(F \times A_i)$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $z \in F \times A_{i_0}$.

Donc $z \in F \times A_{i_0}$.

Il existe donc $y \in F$ et $x \in A_{i_0}$ tels que $z = (y; x)$.

Donc $z = (y; x)$ et $y \in F$ et $x \in A_{i_0}$.

Donc $z = (y; x)$ et $y \in F$ et il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $z = (y; x)$ et $y \in F$ et $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

Donc $z \in F \times \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)$.

Donc si $z \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)$, alors $z \in F \times \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)$.

Ainsi, $z \in F \times \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)$ si et seulement si $z \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)$.

Donc $\forall z, \left( z \in F \times \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \iff z \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i) \right)$.

Donc $\boxed{F \times \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)}$.

♦ (4)

Soit $F \in E$.

Soit $z$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $z \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \times F$.

Il existe donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et $y \in F$ tels que $z = (x; y)$.

On a donc $z = (x; y)$ et $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et $y \in F$.

On a donc $z = (x; y)$ et il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ et $y \in F$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $z = (x; y)$ et $x \in A_{i_0}$ et $y \in F$.

Donc $z \in A_{i_0} \times F$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $z \in A_i \times F$.

Donc $z \in \bigcup_{i \in I} (A_i \times F)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $z \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \times F$, alors $z \in \bigcup_{i \in I} (A_i \times F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $z \in \bigcup_{i \in I} (A_i \times F)$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $z \in A_{i_0} \times F$.

Donc $z \in A_{i_0} \times F$.

Il existe donc $x \in A_{i_0}$ et $y \in F$ tels que $z = (y; x)$.

Donc $z = (x; y)$ et $x \in A_{i_0}$ et $y \in F$.

Donc $z = (x; y)$ et il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et $y \in F$.

Donc $z = (x; y)$ et $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et $y \in F$.

Donc $z \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F$.

Donc si $z \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times F)$, alors $z \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F$.

Ainsi, $z \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F$ si et seulement si $z \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times F)$.

Donc $\forall z, \left(z \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F \iff z \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times F)\right)$.

Donc $\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcup_{i\in I}(A_i \times F)}$.

♦ (5)

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &= \bigcup_{i\in I}\left(A_i \times \left[\bigcup_{j\in J} B_j\right]\right) \text{ d'après } (4)\\ &= \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i \times B_j) \text{ d'après } (3)\\ &= \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \times B_j).\end{aligned}$$

On peut donc dire que $\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \times B_j)}$.

♦ (6)

Introduisons les applications $\begin{array}{rccc}\pi_g : & I\times J & \longrightarrow & I\\ & (i;j) & \longmapsto & i\end{array}$ et $\begin{array}{rccc}\pi_d : & I\times J & \longrightarrow & J\\ & (i;j) & \longmapsto & j\end{array}$

Soit $x$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ ou $x \in \bigcup_{j\in J} B_j$.

Raisonnons par disjonction de cas :

Supposons que $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

On sait par hypothèse que $J$ est non vide.

Il existe donc $j_0 \in J$.

On a $A_{i_0} \subseteq A_{i_0} \cup B_{j_0}$ d'après la prop. 16 p. 16.

Donc $x \in A_{i_0} \cup B_{j_0}$.

Posons $k_0 = (i_0; j_0) \in I \times J$.

On a alors $A_{i_0} \cup B_{j_0} = A_{\pi_g(k_0)} \cup B_{\pi_d(k_0)}$.

Donc $x \in A_{\pi_g(k_0)} \cup B_{\pi_d(k_0)}$.

Supposons cette fois que $x \in \bigcup_{j \in J} B_j$.

Il existe donc $j_0 \in J$ tel que $x \in B_{j_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

On sait par hypothèse que $I$ est non vide.

Il existe donc $i_0 \in I$.

On a $B_{j_0} \subseteq A_{i_0} \cup B_{j_0}$ d'après la prop. 16 p. 16.

Donc $x \in A_{i_0} \cup B_{j_0}$.

Posons $k_0 = (i_0; j_0) \in I \times J$.

On a alors $A_{i_0} \cup B_{j_0} = A_{\pi_g(k_0)} \cup B_{\pi_d(k_0)}$.

Donc $x \in A_{\pi_g(k_0)} \cup B_{\pi_d(k_0)}$.

Dans les deux cas, il existe donc $k \in I \times J$ tel que $x \in A_{\pi_g(k)} \cup B_{\pi_d(k)}$.

Donc $x \in \bigcup_{k \in I \times J} (A_{\pi_g(k)} \cup B_{\pi_d(k)})$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_{\pi_g(i;j)} \cup B_{\pi_d(i;j)})$.

Donc $x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$.

Donc si $x \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right)$, alors $x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$.

Donc il existe $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$ tels que $x \in A_{i_0} \cup B_{j_0}$ d'après la prop. 167 p. 234.

Donc $x \in A_{i_0} \cup B_{j_0}$.

Donc $x \in A_{i_0}$ ou $x \in B_{j_0}$.

Raisonnons par disjonction de cas :

Supposons que $x \in A_{i_0}$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right)$ d'après la prop. 16 p. 16.

Donc $x \in \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right)$.

Supposons à présent que $x \in B_{j_0}$.

Il existe donc $j \in J$ tel que $x \in B_j$.

Donc $x \in \bigcup_{j \in J} B_j$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, $\bigcup_{j \in J} B_j \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$ d'après la prop. 16 p. 16.

Donc $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$.

Dans les deux cas, $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$.

Donc si $x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$, alors $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$.

Finalement, $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$ si et seulement si $x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$.

Donc $\forall x, \left( x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \iff x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j) \right)$.

Donc $\boxed{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)}$. **CQFD**.

## Proposition 169 (Réunion de familles et images)

Soient $E$ et $F$ deux ensembles non vides. Soient $I$ et $J$ deux ensembles.

Soit $f : E \to F$.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $E$ indexée par $I$.

Soit $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties de $F$ indexée par $J$.

1. On a $f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

2. On a $f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

*Démonstration*

♦ 1

Soit $y \in F$.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Il existe donc $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$ par définition de $f^{\rightarrow}$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A_{i_0})$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $y \in f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, alors $y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $y \in f^{\rightarrow}(A_{i_0})$ d'après la prop. 162 p. 227.

Il existe donc $x \in A_{i_0}$ tel que $y = f(x)$ par définition de $f^{\rightarrow}$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 162 p. 227.

Or, $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Donc si $y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$, alors $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Finalement, $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ si et seulement si $y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $\forall y \in F, \left(y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \iff y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)\right)$.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)}$.

♦ 2

Soit $x \in E$.

Raisonnons par doubles implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$.

Donc $f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j$ par définition de $f^{\leftarrow}$.

Il existe donc $j_0 \in J$ tel que $f(x) \in B_{j_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $x \in f^{\leftarrow}(B_{j_0})$ par définition de $f^{\leftarrow}$.

Il existe donc $j \in J$ tel que $x \in f^{\leftarrow}(B_j)$.

Donc $x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$, alors $x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

Il existe donc $j_0 \in J$ tel que $x \in f^{\leftarrow}(B_{j_0})$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $f(x) \in B_{j_0}$ par définition de $f^{\leftarrow}$.

Il existe donc $j \in J$ tel que $f(x) \in B_j$.

Donc $f(x) \in \bigcup_{j \in J} B_j$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$.

Donc si $x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$, alors $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$.

Finalement, $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$ si et seulement si $x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

Donc $\forall x, \left(x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \iff x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)\right)$.

Donc $\boxed{f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)}$.

**CQFD**.

**Notation**

Soit $E$ un ensemble non vide. Soient $I$ et $J$ deux ensembles.

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(f(i;j))_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ deux familles d'éléments de $E$ indexées respectivement par $I$ et $I\times J$.

Soit $P$ une assertion pouvant dépendre d'un paramètre.

• On notera $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ P(i)}} A_i$ l'ensemble $\bigcup\{A_i \mid i\in I \text{ et } P(i)\}$.

• On notera $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ P(i;j)}} f(i;j)$ l'ensemble $\bigcup\{f(i;j) \mid i\in I \text{ et } j\in J \text{ et } P(i;j)\}$.

Ici encore, $i$ et $j$ sont **muets** : on peut les remplacer par n'importe quels caractères, pour peu qu'ils ne soient pas déjà utilisés, et que celui qui remplace $i$ soit différent de celui qui remplace $j$.

Par exemple, $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ P(i)}} A_i = \bigcup\limits_{\substack{k\in I\\ P(k)}} A_k$. De même, $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ P(i;j)}} f(i;j) = \bigcup\limits_{\substack{a\in I\\ b\in J\\ P(a;b)}} f(a;b)$.

## Proposition 170 (Réunion et assertions)

oit $E$ un ensemble non vide. Soient $I$ et $J$ deux ensembles.

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(f(i;j))_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ deux familles d'éléments de $E$ indexées respectivement par $I$ et $I\times J$.

Soient $P$ et $Q$ deux assertions pouvant dépendre d'un paramètre.

(1) Si $\forall i\in I, \Big(P(i)\Rightarrow Q(i)\Big)$, alors $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ P(i)}} A_i \subseteq \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ Q(i)}} A_i$.

(2) Si $\forall i\in I, \Big(P(i)\iff Q(i)\Big)$, alors $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ P(i)}} A_i = \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ Q(i)}} A_i$.

(3) Si $\forall i\in I, \forall j\in J, \Big(P(i;j)\Rightarrow Q(i;j)\Big)$, alors $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ P(i;j)}} f(i;j) \subseteq \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ Q(i;j)}} f(i;j)$.

(4) Si $\forall i\in I, \forall j\in J, \Big(P(i;j)\iff Q(i;j)\Big)$, alors $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ P(i;j)}} f(i;j) = \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ Q(i;j)}} f(i;j)$.

*Démonstration*

Notons $A=(A_i)_{i\in I}$ et $f=(f(i;j))_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$.

♦ (1)

Supposons que $\forall i \in I, \Big(P(i) \Rightarrow Q(i)\Big)$.

On a donc $\{i \in I \mid P(i)\} \subseteq \{i \in I \mid Q(i)\}$ d'après la prop. 5 p. 6.

Donc $A^{\to}\Big(\{i \in I \mid P(i)\}\Big) \subseteq A^{\to}\Big(\{i \in I \mid Q(i)\}\Big)$ par croissance de $A^{\to}$.

Donc $\{A_i \mid i \in I \text{ et } P(i)\} \subseteq \{A_i \mid i \in I \text{ et } Q(i)\}$ par définition.

Donc $\bigcup\{A_i \mid i \in I \text{ et } P(i)\} \subseteq \bigcup\{A_i \mid i \in I \text{ et } Q(i)\}$ par croissance de la réunion.

Donc $\boxed{\bigcup_{\substack{i\in I\\P(i)}} A_i \subseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\Q(i)}} A_i}$.

♦ (2)

Supposons que $\forall i \in I, \Big(P(i) \iff Q(i)\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \Big(P(i) \Rightarrow Q(i) \text{ et } Q(i) \Rightarrow P(i)\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \Big(P(i) \Rightarrow Q(i)\Big)$ et $\forall i \in I, \Big(Q(i) \Rightarrow P(i)\Big)$.

Donc $\bigcup_{\substack{i\in I\\P(i)}} A_i \subseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\Q(i)}} A_i$ et $\bigcup_{\substack{i\in I\\P(i)}} A_i \supseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\Q(i)}} A_i$ d'après (1).

Donc $\boxed{\bigcup_{\substack{i\in I\\P(i)}} A_i = \bigcup_{\substack{i\in I\\Q(i)}} A_i}$.

♦ (3)

Supposons que $\forall i \in I, \forall j \in J, \Big(P(i;j) \Rightarrow Q(i;j)\Big)$.

Donc $\{(i;j) \in I \times J \mid P(i;j)\} \subseteq \{(i;j) \in I \times J \mid Q(i;j)\}$ d'après la prop. 5 p. 6.

Donc $f^{\to}\Big(\{(i;j) \in I \times J \mid P(i;j)\}\Big) \subseteq f^{\to}\Big(\{(i;j) \in I \times J \mid Q(i;j)\}\Big)$ par croissance de $f^{\to}$.

Donc $\{f(i;j) \mid i \in I \text{ et } j \in J \text{ et } P(i;j)\} \subseteq \{f(i;j) \mid i \in I \text{ et } j \in J \text{ et } Q(i;j)\}$ par définition.

Donc $\bigcup\{f(i;j) \mid i \in I \text{ et } j \in J \text{ et } P(i;j)\} \subseteq \bigcup\{f(i;j) \mid i \in I \text{ et } j \in J \text{ et } Q(i;j)\}$ par croissance de la réunion.

Donc $\boxed{\bigcup_{\substack{i\in I\\j\in J\\P(i;j)}} f(i;j) \subseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\j\in J\\Q(i;j)}} f(i;j)}$.

♦ (4)

Supposons que $\forall i \in I, \forall j \in J, \Big(P(i;j) \iff Q(i;j)\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \forall j \in J, \Big(P(i;j) \Rightarrow Q(i;j) \text{ et } P(i;j) \Leftarrow Q(i;j)\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \forall j \in J, \Big(P(i;j) \Rightarrow Q(i;j)\Big)$ et $\forall i \in I, \forall j \in J, \Big(P(i;j) \Leftarrow Q(i;j)\Big)$.

Donc $\bigcup_{\substack{i\in I\\j\in J\\P(i;j)}} f(i;j) \subseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\j\in J\\Q(i;j)}} f(i;j)$ et $\bigcup_{\substack{i\in I\\j\in J\\P(i;j)}} f(i;j) \supseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\j\in J\\Q(i;j)}} f(i;j)$ d'après (3).

Donc $\boxed{\bigcup_{\substack{i\in I\\j\in J\\P(i;j)}} f(i;j) = \bigcup_{\substack{i\in I\\j\in J\\Q(i;j)}} f(i;j)}$.

**CQFD**.

## 3 Intersection d'une famille d'ensembles

**Proposition 171 (Image non vide d'une famille)**

Soient $E$ et $I$ deux ensembles non vides.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

Alors $\{A_i \mid i \in I\}$ est non vide.

*Démonstration*

Notons $A = (A_i)_{i\in I}$.

On a alors $\{A_i \mid i \in I\} = \mathrm{im}\left((A_i)_{i\in I}\right) = \mathrm{im}(A) = A^{\rightarrow}(I)$.

Or, $I$ est non vide par hypothèse, et donc $A^{\rightarrow}(I)$ est non vide d'après la prop. 125 p. 160.

On en déduit donc que $\boxed{\{A_i \mid i \in I\} \text{ est non vide}}$.

**CQFD**.

Cette proposition va permettre de donner la définition suivante, puisque l'intersection d'un ensemble requiert avant tout que celui-ci ne soit pas vide.

**Définition 68 (Intersection d'une famille d'ensembles)**

Soient $E$ et $I$ deux ensembles non vides.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

On appelle **intersection** de $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\bigcap \{A_i \mid i \in I\}$.

On le note $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

**Notation**

Ici aussi, dans $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, le $i$ est **muet** : on peut le remplacer par n'importe quel caractère.

Ainsi, on a $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{j\in I} A_j = \bigcap\limits_{k\in I} A_k$.

Ici encore, il faut veiller au fait que cette variable muette ne soit pas déjà utilisée au sein d'une même expression, au risque de produire un contre-sens !

**Proposition 172 (Autre notation pour l'intersection d'un ensemble)**

Soit $E$ un ensemble non vide.

On a alors $\bigcap E = \bigcap\limits_{A\in E} A$.

*Démonstration*

$E = \text{im}\,(\text{id}_E) = \{\text{id}_E(A) \mid A \in E\} = \{A \mid A \in E\}$.

Donc $E = \{A \mid A \in E\}$.

Donc $\bigcap E = \bigcap \{A \mid A \in E\}$.

Or, $\bigcap \{A \mid A \in E\} = \bigcap\limits_{A \in E} A$ par définition.

Donc $\boxed{\bigcap E = \bigcap\limits_{A \in E} A}$.

**CQFD**.

## Proposition 173 (Caractérisation de l'intersection)

Soient $E$ et $I$ deux ensembles non vides.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

Soit $x$ un ensemble.

On a alors $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ si et seulement si $\forall i \in I, x \in A_i$.

*Démonstration*

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

Donc $x \in \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$.

Donc $x \in \bigcap \text{im}\,((A_i)_{i \in I})$.

Donc $\forall B \in \text{im}\,((A_i)_{i \in I})\,, x \in B$ par définition de l'intersection d'un ensemble.

Soit $j \in I$.

On a $\text{im}\,((A_i)_{i \in I}) = \{B \in E \mid \exists i \in I, B = A_i\}$.

En particulier, pour $B = A_j$, il existe bien $i \in I$ tel que $A_j = A_i$.

Donc $A_j \in \text{im}\,((A_i)_{i \in I})$.

Or, on a montré que $\forall B \in \text{im}\,((A_i)_{i \in I})\,, x \in B$.

En particulier, $x \in A_j$.

Donc $\forall j \in I, x \in A_j$.

Ainsi, si $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, alors $\forall j \in I, x \in A_j$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall i \in I, x \in A_i$.

Soit $C \in \{A_i \mid i \in I\}$.

Par définition, on a $\{A_i \mid i \in I\} = \text{im}\,((A_i)_{i\in I}) = \{B \in E \mid \exists i \in I, B = A_i\}$.

Donc $C \in \{B \in E \mid \exists i \in I, B = A_i\}$.

Il existe donc $i_0 \in I$ tel que $C = A_{i_0}$.

Or, $\forall i \in I, x \in A_i$.

Donc en particulier $x \in A_{i_0}$.

Donc $x \in C$.

Donc $\forall C \in \{A_i \mid i \in I\}, x \in C$.

Donc $x \in \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$.

Or, $\bigcap \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Donc si $\forall i \in I, x \in A_i$, alors $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Finalement, $\boxed{x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \text{ si et seulement si } \forall i \in I, x \in A_i}$.

**CQFD**.

## Proposition 174 (Intersections simples)

Soient $E$ et $I$ deux ensembles non vides.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

(1) S'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = A_{i_0}$.

(2) S'il existe $i_1$ et $i_2$ dans $I$ tels que $I = \{i_1; i_2\}$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = A_{i_1} \cap A_{i_2}$.

*Démonstration*

♦ (1)

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$.

Notons $A = (A_i)_{i\in I}$.

On a $\{A_i \mid i \in I\} = \text{im}\Big((A_i)_{i\in I}\Big) = \text{im}(A) = A^{\rightarrow}(I) = A^{\rightarrow}\Big(\{i_0\}\Big) \underset{126 \text{ p. } 161}{=} \Big\{A(i_0)\Big\} = \Big\{A_{i_0}\Big\}$.

Donc $\{A_i \mid i \in I\} = \Big\{A_{i_0}\Big\}$.

Donc $\bigcap \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap \Big\{A_{i_0}\Big\}$.

Or, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ par définition.

Donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap \Big\{A_{i_0}\Big\}$.

Or, $\bigcap \Big\{A_{i_0}\Big\} = A_{i_0}$ d'après la prop. 21 p. 22.

Donc $\boxed{\bigcap\limits_{i\in I} A_i = A_{i_0}}$.

♦ (2)

Supposons qu'il existe $i_1$ et $i_2$ dans $I$ tels que $I = \{i_1; i_2\}$.

Notons $A = (A_i)_{i\in I}$.

On a $\{A_i \mid i \in I\} = \mathrm{im}\Big((A_i)_{i\in I}\Big) = \mathrm{im}(A) = A^{\rightarrow}(I) = A^{\rightarrow}\Big(\{i_1; i_2\}\Big)$

$\underset{126 \text{ p. } 161}{=} \Big\{A(i_1); A(i_2)\Big\} = \Big\{A_{i_1}; A_{i_2}\Big\}$.

Donc $\{A_i \mid i \in I\} = \Big\{A_{i_1}; A_{i_2}\Big\}$.

Donc $\bigcap \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap \Big\{A_{i_1}; A_{i_2}\Big\}$.

Or, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ par définition.

Donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap \Big\{A_{i_1}; A_{i_2}\Big\}$.

Or, $\bigcap \Big\{A_{i_1}; A_{i_2}\Big\} = A_{i_1} \cap A_{i_2}$ par définition de $\cap$.

Donc $\boxed{\bigcap\limits_{i\in I} A_i = A_{i_1} \cap A_{i_2}}$.

**CQFD**.

## Proposition 175 (Intersection, maximalité et décroissance)

Soient $E$ et $I$ deux ensembles non vides. Soit $F$ un ensemble.

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $E$ indexée par $I$.

(1) Pour tout $i_0$ dans $I$, on a $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq A_{i_0}$.

(2) Si pour tout $i \in I$, on a $F \subseteq A_i$, alors $F \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

On dit que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est le **maximum**, au sens de l'inclusion, parmi les ensembles contenus dans tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.

(3) S'il existe $i_0$ dans $I$ tel que pour tout $i$ dans $I$, $A_{i_0} \subseteq A_i$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = A_{i_0}$.

(4) S'il existe $i_0$ dans $I$ tel que $A_{i_0} = \emptyset$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$.

(5) Si pour tout $i \in I$, on a $A_i \subseteq B_i$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} B_i$.

On dit que $\bigcap$ est **compatible** avec l'inclusion.

(6) Pour toute sous-famille $(A_j)_{j\in J}$ de $(A_i)_{i\in I}$, avec $J \neq \emptyset$, on a $\bigcap\limits_{j\in J} A_j \supseteq \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

*Démonstration*

♦ (1)

Soit $i_0 \in I$.

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Alors $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

En particulier, pour $i = i_0$, on a $x \in A_{i_0}$.

Donc si $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, alors $x \in A_{i_0}$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Rightarrow x \in A_{i_0}\right)$.

Donc $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}}$.

♦ (2)

Supposons que $\forall i \in I, F \subseteq A_i$.

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in F$.

Soit $i \in I$.

Par hypothèse, on sait que $F \subseteq A_i$.

Donc $x \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $x \in F$, alors $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in F \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i\right)$.

Donc $\boxed{F \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i}$.

♦ (3)

Supposons qu'il existe $i_0$ dans $I$ tel que $\forall i \in I, A_{i_0} \subseteq A_i$.

En particulier, d'après $(2)$, avec $F = A_{i_0}$, on obtient $A_{i_0} \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

De plus, d'après $(1)$, on a aussi $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$.

Finalement, $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i = A_{i_0}}$.

♦ (4)

Supposons qu'il existe $i_0$ dans $I$ tel que $A_{i_0} = \emptyset$.

Or, pour tout $i \in I$, on a $\emptyset \subseteq A_i$ d'après la prop. 7 p. 8.

On a donc pour tout $i \in I$, on a $A_{i_0} \subseteq A_i$.

Donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = A_{i_0}$ d'après (3).

Donc $\boxed{\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \emptyset}$.

♦ (5)

Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Soit $i \in I$.

On a donc $x \in A_i$.

Or, $A_i \subseteq B_i$ par hypothèse.

Donc $x \in B_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in B_i$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{i\in I} B_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, alors $x \in \bigcap\limits_{i\in I} B_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{i\in I} B_i\right)$.

Donc $\boxed{\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} B_i}$.

♦ (6)

Soit $(A_j)_{j\in J}$ une sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$, avec $J \neq \emptyset$.

En particulier, $J$ est un sous-ensemble de $I$.

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Soit $j \in J$.

Comme on a dit plus tôt, on a $J \subseteq I$.

Donc $j \in I$.

Or, on a dit que $\forall i \in I, x \in A_i$.

Donc $x \in A_j$.

Donc $\forall j \in J, x \in A_j$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{j\in J} A_j$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, alors $x \in \bigcap\limits_{j\in J} A_j$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{j\in J} A_j\right)$.

Donc $\boxed{\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap\limits_{j\in J} A_j}$.

. **CQFD**.

## Proposition 176 (Associativité de l'intersection)

Soient $E$, $I$ et $M$ trois ensembles non vides.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

Soit $(J_m)_{m\in M}$ une famille de parties non vides de $I$, indexée par $M$.

Si $I = \bigcup\limits_{m\in M} J_m$, alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{m\in M}\left(\bigcap\limits_{i\in J_m} A_i\right)$.

On appelle cette propriété **l'associativité** de l'intersection.

*Démonstration*

Supposons que $I = \bigcup\limits_{m\in M} J_m$.

Raisonnons par doubles inclusions.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Donc pour tout $i \in I$, $x \in A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star)$ cette propriété.

Soit $m \in M$.

Soit $i \in J_m$.

Par définition, $J_m$ est une partie de $I$.

Donc $i \in I$.

Donc d'après $(\star)$, on a $x \in A_i$.

Donc $\forall i \in J_m, x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc $\forall m \in M, x \in \bigcap\limits_{i\in J_m} A_i$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{m\in M}\left(\bigcap\limits_{i\in J_m} A_i\right)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, alors $x \in \bigcap\limits_{m\in M}\left(\bigcap\limits_{i\in J_m} A_i\right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{m\in M}\left(\bigcap\limits_{i\in J_m} A_i\right)\right)$.

Donc $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap\limits_{m\in M}\left(\bigcap\limits_{i\in J_m} A_i\right)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x$ un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap_{m \in M} \left( \bigcap_{i \in J_m} A_i \right)$.

Donc $\forall m \in M, x \in \bigcap_{i \in J_m} A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star\star)$ cette propriété.

Soit $i \in I$.

Par hypothèse, on sait que $I = \bigcup_{m \in M} J_m$.

Il existe donc $m_0 \in M$ tel que $i \in J_{m_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

En particulier, d'après $(\star\star)$, on a $x \in \bigcap_{j \in J_{m_0}} A_j$.

Donc $\forall j \in J_{m_0}, x \in A_j$ d'après la prop. 173 p. 250.

En particulier, pour $j = i$, on a $x \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $x \in \bigcap_{m \in M} \left( \bigcap_{i \in J_m} A_i \right)$, alors $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Donc $\forall x, \left( x \in \bigcap_{m \in M} \left( \bigcap_{i \in J_m} A_i \right) \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} A_i \right)$.

Donc $\bigcap_{m \in M} \left( \bigcap_{i \in J_m} A_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

Finalement, $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{m \in M} \left( \bigcap_{i \in J_m} A_i \right)}$.

**CQFD**.

## Proposition 177 (Changement d'indice dans une intersection)

Soient $E$, $I$ et $J$ trois ensembles non vides. Soit $f : J \to I$.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I$.

1. On a toujours $\bigcap_{j \in J} A_{f(j)} \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

2. Si $f$ est surjective, alors $\bigcap_{j \in J} A_{f(j)} = \bigcap_{i \in I} A_i$.

3. En particulier, si $f$ est bijective, alors $\bigcap_{j \in J} A_{f(j)} = \bigcap_{i \in I} A_i$.

*Démonstration*

1. On sait que $\{A_{f(j)} \mid j \in J\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 99 p. 126.

On a donc $\bigcap \{A_{f(j)} \mid j \in J\} \supseteq \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ par décroissance de $\bigcap$.

Or, $\bigcap \left\{ A_{f(j)} \mid j \in J \right\} = \bigcap\limits_{j \in J} A_{f(j)}$ et $\bigcap \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ par définition.

On a donc $\boxed{\bigcap\limits_{j \in J} A_{f(j)} \supseteq \bigcap\limits_{i \in I} A_i}$.

(2) Supposons que $f$ est surjective.

Alors on a $\left\{ A_{f(j)} \mid j \in J \right\} = \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 118 p. 153.

Or, $\bigcap \left\{ A_{f(j)} \mid j \in J \right\} = \bigcap\limits_{j \in J} A_{f(j)}$ et $\bigcap \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ par définition.

On a donc $\boxed{\bigcap\limits_{j \in J} A_{f(j)} = \bigcap\limits_{i \in I} A_i}$.

(3) Supposons que $f$ est bijective.

Alors $f$ est surjective.

Donc d'après (2), on a $\boxed{\bigcap\limits_{j \in J} A_{f(j)} = \bigcap\limits_{i \in I} A_i}$.

**CQFD.**

### Notation

Soient $E$, $I$ et $J$ trois ensembles non vides.

Soit $(f(i;j))_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I \times J$.

On notera parfois $\bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$ ou $\bigcap\limits_{(i;j) \in I \times J} f(i;j)$ à la place de $\bigcap\limits_{z \in I \times J} f(z)$.

Ici encore, $i$ et $j$ sont des variables **muettes** : on peut les remplacer par n'importe quels caractères (celui qui remplace $i$ doit bien entendu être différent de celui qui remplace $j$).

Ainsi, on a par exemple $\bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j) = \bigcap\limits_{\substack{a \in I \\ b \in J}} f(a;b) = \bigcap\limits_{\substack{c \in I \\ d \in J}} f(c;d)$.

Encore une fois, on prendra garde à ce que ces caractères muets ne soient pas déjà utilisés au sein d'une même expression, au risque de produire d'écrire des contre sens !

### Proposition 178 (Intersection double)

Soient $E$, $I$ et $J$ trois ensembles non vides.

Soit $(f(i;j))_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ une famille d'éléments de $E$ indexée par $I \times J$.

(1) On a alors $\bigcap\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J} f(i;j) = \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j) = \bigcap\limits_{j \in J} \bigcap\limits_{i \in I} f(i;j)$.

(2) De plus, pour tout ensemble $x$, on a $x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$ si et seulement si $\forall i \in I, \forall j \in J, x \in f(i;j)$.

*Démonstration*

**Démonstration de** $(1)$.

- Commençons par démontrer que $\bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J} f(i;j) = \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

  Soit $x$ un ensemble.

  Raisonnons par doubles implications.

  $\boxed{\Rightarrow}$

  Supposons que $x \in \bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J} f(i;j)$.

  Donc $\forall i \in I, x \in \bigcap\limits_{j\in J} f(i;j)$ d'après la prop. 173 p. 250.

  Donc $\forall i \in I, \forall j \in J, x \in f(i;j)$ d'après la prop. 173 p. 250.

  Notons $(\star_1)$ cette assertion.

  Soit $z \in I \times J$.

  Il existe donc $i \in I$ et $j \in J$ tels que $z = (i;j)$.

  D'après $(\star_1)$, on a $x \in f(i;j)$.

  Donc $x \in f(z)$.

  Donc $\forall z \in I \times J, x \in f(z)$.

  Donc $x \in \bigcap\limits_{z\in I\times J} f(z)$ d'après la prop. 173 p. 250.

  Donc $x \in \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

  Donc si $x \in \bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J} f(i;j)$, alors $x \in \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

  $\boxed{\Leftarrow}$

  Supposons que $x \in \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$.

  Donc $x \in \bigcap\limits_{z\in I\times J} f(z)$.

  Donc $\forall z \in I \times J, x \in f(z)$ d'après la prop. 173 p. 250.

  Notons $(\star_2)$ cette assertion.

  Soit $i \in I$.

  Soit $j \in J$.

  Posons $z = (i;j) \in I \times J$.

  Donc d'après $(\star_2)$, on a $x \in f(z)$.

  Donc $x \in f(i;j)$.

  Donc $\forall j \in J, x \in f(i;j)$.

  Donc $x \in \bigcap\limits_{j\in J} f(i;j)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc $\forall i \in I, x \in \bigcap_{j \in J} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} f(i;j)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$, alors $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} f(i;j)$.

Finalement, $x \in \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} f(i;j)$ si et seulement si $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$.

Donc $\forall x, \left( x \in \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} f(i;j) \iff x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j) \right)$.

Donc $\boxed{\bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} f(i;j) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)}$.

♦ Montrons à présent $\bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j) = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} f(i;j)$.

Soit $x$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcap_{z \in I \times J} f(z)$.

Donc $\forall z \in I \times J, x \in f(z)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_2)$ cette assertion.

Soit $j \in J$.

Soit $i \in I$.

Posons $z = (i;j) \in I \times J$.

D'après $(\star_2)$, on a $x \in f(z)$.

Donc $x \in f(i;j)$.

Donc $\forall i \in I, x \in f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in I} f(i;j)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc $\forall j \in J, x \in \bigcap_{i \in I} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} f(i;j)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$, alors $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} f(i;j)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} f(i;j)$.

Donc $\forall j \in J, x \in \bigcap_{i \in I} f(i;j)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc $\forall j \in J, \forall i \in I, x \in f(i;j)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_3)$ cette assertion.

Soit $z \in I \times J$.

Il existe donc $i \in I$ et $j \in J$ tels que $z = (i;j)$.

Donc d'après $(\star_3)$, on a $x \in f(i;j)$.

Donc $x \in f(z)$.

Donc $\forall z \in I \times J, x \in f(z)$.

Donc $x \in \bigcap_{z \in I \times J} f(z)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$.

Donc si $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} f(i;j)$, alors $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$.

Finalement, $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$ si et seulement si $x \in \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} f(i;j)$.

Donc $\forall x, \left( x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j) \iff x \in \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} f(i;j) \right)$.

Donc $\boxed{\bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j) = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} f(i;j)}$.

**Démonstration de** $(2)$.

Soit $x$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$.

Donc $x \in \bigcap_{z \in I \times J} f(z)$.

Donc $\forall z \in I \times J, x \in f(z)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_2)$ cette assertion.

Soit $i \in I$.

Soit $j \in J$.

Posons $z = (i;j) \in I \times J$.

On a $x \in f(z)$ d'après $(\star_2)$.

Donc $x \in f(i;j)$.

Donc $\forall j \in J, x \in f(i;j)$.

Donc $\forall i \in I, \forall j \in J, x \in f(i;j)$.

Donc $\boxed{\text{si } x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j), \text{ alors } \forall i \in I, \forall j \in J, x \in f(i;j)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall i \in I, \forall j \in J, x \in f(i;j)$.

Notons $(\star_1)$ cette assertion.

Soit $z \in I \times J$.

Il existe donc $i \in I$ et $j \in J$ tels que $z = (i;j)$.

Donc d'après $(\star_1)$, $x \in f(i;j)$.

Donc $x \in f(z)$.

Donc $\forall z \in I \times J, x \in f(z)$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{z \in I \times J} f(z)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc $x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$.

Donc $\boxed{\text{si } \forall i \in I, \forall j \in J, x \in f(i;j), \text{ alors } x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)}$.

**CQFD**.

## Proposition 179 (Intersection et opérations)

Soient $E$, $I$ et $J$ trois ensembles non vides.

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles d'éléments indexées respectivement par $I$ et $J$.

### Réunion

① **Distributivité de la réunion sur l'intersection** :

Pour tout $F \in E$, on a $F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i)$.

② **Double distributivité de la réunion sur l'intersection** :

$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cup B_j)$.

### Produit cartésien

③ **Distributivité à gauche du produit cartésien sur l'intersection** :

Pour tout $F \in E$ on a $F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(F \times A_i)$.

④ **Distributivité à droite du produit cartésien sur l'intersection** :

Pour tout $F \in E$ on a $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcap_{i\in I}(A_i \times F)$.

⑤ **Double distributivité du produit cartésien sur l'intersection** :

$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \times B_j)$.

### Intersection

⑥ $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cap B_j)$.

*Démonstration*

♦ ①

Soit $F \in E$.

Soit $x$ un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& x \in F \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right). \\
\iff & x \in F \text{ ou } x \in \bigcap_{i \in I} A_i. \\
\iff & x \in F \text{ ou } \forall i \in I, x \in A_i \text{ d'après la prop. 173 p. 250.} \\
\iff & \forall i \in I, \Big( x \in F \text{ ou } x \in A_i \Big). \\
\iff & \forall i \in I, x \in F \cup A_i. \\
\iff & x \in \bigcap_{i \in I} (F \cup A_i) \text{ d'après la prop. 173 p. 250.}
\end{aligned}
$$

Donc $x \in F \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \iff x \in \bigcap_{i \in I} (F \cup A_i)$.

Ceci étant vrai pour tout ensemble $x$, on peut affirmer que $\boxed{F \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (F \cup A_i)}$.

♦ 2

On a les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{j \in J} B_j \right) &= \left( \bigcap_{j \in J} B_j \right) \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \text{ par commutativité de } \cup \\
&= \bigcap_{i \in I} \left( \left[ \bigcap_{j \in J} B_j \right] \cup A_i \right) \text{ d'après } (1) \\
&= \bigcap_{i \in I} \left( A_i \cup \left[ \bigcap_{j \in J} B_j \right] \right) \text{ par commutativité de } \cup \\
&= \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_i \cup B_j) \text{ d'après } (1) \\
&= \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j) \text{ d'après la prop. 178 p. 257.}
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{\left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup \left( \bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)}$.

♦ 3

Soit $F \in E$.

Soit $z$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $z \in F \times \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)$.

Il existe donc $x \in F$ et $y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ tels que $z = (x; y)$.

Comme $y \in \bigcap_{i \in I} A_i$, on a $\forall i \in I, y \in A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_1)$ cette dernière assertion.

Soit $i \in I$.

D'après $(\star_1)$, on a donc $y \in A_i$.

Ainsi, $x \in F$ et $y \in A_i$.

Donc $(x; y) \in F \times A_i$.

Or, $z = (x; y)$.

Donc $z \in F \times A_i$.

Donc $\forall i \in I, z \in F \times A_i$.

Donc $z \in \bigcap_{i \in I} (F \times A_i)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $z \in F \times \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$, alors $z \in \bigcap_{i \in I} (F \times A_i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $z \in \bigcap_{i \in I} (F \times A_i)$.

Donc $\forall i \in I, z \in F \times A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_2)$ cette dernière assertion.

Comme $I$ n'est pas vide, il existe $i_0 \in I$.

D'après $(\star_2)$, on sait que $z \in F \times A_{i_0}$.

Il existe donc $x \in F$ et $y \in A_{i_0}$ tels que $z = (x; y)$.

Montrons que $y \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Soit $i \in I$.

D'après $(\star_2)$, on sait que $z \in F \times A_i$.

Il existe donc $x' \in F$ et $y' \in A_i$ tels que $z = (x'; y')$.

Or, $z = (x; y)$.

Donc $(x; y) = (x'; y')$.

Donc $x = x'$ et $y = y'$.

Or, $y' \in A_i$ par définition.

Donc $y \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, y \in A_i$.

Donc $y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Ainsi, $x \in F$ et $y \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Or, $z = (x; y)$.

Donc $z \in F \times \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)$.

Donc si $z \in \bigcap_{i \in I} (F \times A_i)$, alors $z \in F \times \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)$.

Finalement, $z \in F \times \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)$ si et seulement si $z \in \bigcap_{i \in I} (F \times A_i)$.

Donc $\forall z, \left( z \in F \times \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \iff z \in \bigcap_{i \in I} (F \times A_i) \right)$.

Donc $\boxed{F \times \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (F \times A_i)}$.

♦ 4

Soit $F \in E$.

Soit $z$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $z \in \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \times F$.

Il existe donc $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ et $y \in F$ tels que $z = (x; y)$.

Comme $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, on a $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_3)$ cette dernière assertion.

Soit $i \in I$.

D'après $(\star_3)$, on sait que $x \in A_i$.

On a donc $x \in A_i$ et $y \in F$.

Or, $z = (x; y)$.

Donc $z \in A_i \times F$.

Donc $\forall i \in I, z \in A_i \times F$.

Donc $z \in \bigcap_{i \in I} (A_i \times F)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $z \in \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \times F$, alors $z \in \bigcap_{i \in I} (A_i \times F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $z \in \bigcap_{i \in I} (A_i \times F)$.

Donc $\forall i \in I, z \in A_i \times F$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_4)$ cette dernière assertion.

Comme $I$ n'est pas vide, il existe $i_0 \in I$.

D'après $(\star_4)$, on sait que $z \in A_{i_0} \times F$.

Il existe donc $x \in A_{i_0}$ et $y \in F$ tels que $z = (x;y)$.

Montrons que $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Soit $i \in I$.

D'après $(\star_4)$, on a $z \in A_i \times F$.

Il existe donc $x' \in A_i$ et $y' \in F$ tels que $z = (x';y')$.

Or, $z = (x;y)$.

Donc $(x;y) = (x';y')$.

Donc $x = x'$ et $y = y'$.

Or, $x' \in A_i$.

Donc $x \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Ainsi, $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ et $y \in F$.

Or, $z = (x;y)$.

Donc $z \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times F$.

Donc si $z \in \bigcap_{i \in I}(A_i \times F)$, alors $z \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times F$.

Finalement, $z \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times F$ si et seulement si $z \in \bigcap_{i \in I}(A_i \times F)$.

Donc $\forall z, \left(z \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times F \iff z \in \bigcap_{i \in I}(A_i \times F)\right)$.

Donc $\boxed{\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times F = \bigcap_{i \in I}(A_i \times F)}$.

♦ 5

On a les égalités suivantes :

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{i \in I}\left(A_i \times \left[\bigcap_{j \in J} B_j\right]\right) \text{ d'après } 4$$

$$= \bigcap_{i \in I}\bigcap_{j \in J}(A_i \times B_j) \text{ d'après } 3$$

$$= \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}}(A_i \times B_j) \text{ d'après la prop. 178 p. 257.}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}}(A_i \times B_j)}$.

♦ 6

Commençons par introduire $\begin{array}{rccc} \pi_g : & I \times J & \longrightarrow & I \\ & (i;j) & \longmapsto & i \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} \pi_d : & I \times J & \longrightarrow & J \\ & (i;j) & \longmapsto & j \end{array}$

Soit $x$ un ensemble.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ et $x \in \bigcap_{j \in J} B_j$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$ et $\forall j \in J, x \in B_j$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_5)$ cette dernière assertion.

Soit $k \in I \times J$.

Il existe donc $i \in I$ et $j \in J$ tels que $k = (i;j)$.

On a $x \in A_i$ et $x \in B_j$ d'après $(\star_5)$.

Donc $x \in A_i \cap B_j$.

Donc $x \in A_{\pi_g(i;j)} \cap B_{\pi_d(i;j)}$.

Donc $x \in A_{\pi_g(k)} \cap B_{\pi_d(k)}$.

Donc $\forall k \in I \times J, x \in A_{\pi_g(k)} \cap B_{\pi_d(k)}$.

Donc $x \in \bigcap_{k \in I \times J} (A_{\pi_g(k)} \cap B_{\pi_d(k)})$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_{\pi_g(i;j)} \cap B_{\pi_d(i;j)})$.

Donc $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)$.

Donc si $x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right)$, alors $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)$.

Donc $x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_{\pi_g(i;j)} \cap B_{\pi_d(i;j)})$.

Donc $x \in \bigcap_{k \in I \times J} (A_{\pi_g(k)} \cap B_{\pi_d(k)})$.

Donc $\forall k \in I \times J, x \in A_{\pi_g(k)} \cap B_{\pi_d(k)}$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_6)$ cette dernière assertion.

Montrons dans un premier temps que $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Soit $i \in I$.

Comme $J$ n'est pas vide, il existe $j \in J$.

Posons $k = (i; j) \in I \times J$.

D'après $(\star_6)$, on a donc $x \in A_{\pi_g(k)} \cap B_{\pi_d(k)}$.

Donc $x \in A_{\pi_g(k)}$ et $x \in B_{\pi_d(k)}$.

En particulier, $x \in A_{\pi_g(k)}$.

Or, $\pi_g(k) = \pi_g(i; j) = i$.

Donc $x \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Montrons maintenant que $x \in \bigcap\limits_{j \in J} B_j$.

Soit $j \in J$.

Comme $I$ n'est pas vide, il existe $i \in I$.

Posons $k = (i; j) \in I \times J$.

D'après $(\star_6)$, on a donc $x \in A_{\pi_g(k)} \cap B_{\pi_d(k)}$.

Donc $x \in A_{\pi_g(k)}$ et $x \in B_{\pi_d(k)}$.

En particulier, $x \in B_{\pi_d(k)}$.

Or, $\pi_d(k) = \pi_d(i; j) = j$.

Donc $x \in B_j$.

Donc $\forall j \in J, x \in B_j$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{j \in J} B_j$ d'après la prop. 173 p. 250.

Ainsi, $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ et $x \in \bigcap\limits_{j \in J} B_j$.

Donc $x \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap\limits_{j \in J} B_j\right)$.

Donc si $x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)$, alors $x \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap\limits_{j \in J} B_j\right)$.

Finalement, $x \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap\limits_{j \in J} B_j\right)$ si et seulement si $x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap\limits_{j \in J} B_j\right) \iff x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)\right)$.

Donc $\boxed{\left(x \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap\limits_{j \in J} B_j\right) = \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j)\right)}$.

**CQFD**.

## Proposition 180 (Lois de De Morgan pour les familles)

Soient $E$ et $I$ deux ensembles non vides. Soit $F \subseteq E$.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$.

**Différence**

1 On a $F - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(F - A_i)$.

2 On a $F - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(F - A_i)$.

**Complémentaire**

3 En particulier, on a $\complement_E\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(\complement_E A_i)$.

4 De même, on a $\complement_E\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(\complement_E A_i)$.

*Démonstration*

1

Soit $x \in E$.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in F - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Donc $x \in F$ et $x \notin \bigcup_{i\in I} A_i$.

Donc $x \in F$ et non$\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Donc $x \in F$ et non$(\exists i \in I, x \in A_i)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $x \in F$ et $\forall i \in I$, non$(x \in A_i)$.

Donc $x \in F$ et $\forall i \in I, x \notin A_i$.

Notons $(\star_1)$ cette dernière assertion.

Soit $i \in I$.

On a $x \in F$ et $x \notin A_i$ d'après $(\star_1)$.

Donc $x \in F - A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in F - A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i\in I}(F - A_i)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $x \in F - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, alors $x \in \bigcap_{i\in I}(F - A_i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in \bigcap_{i \in I} (F - A_i)$.

Donc $\forall i \in I, x \in F - A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_2)$ cette dernière assertion.

Comme $I$ n'est pas vide, il existe $i_0 \in I$.

Donc $x \in F - A_{i_0}$ d'après $(\star_2)$.

Donc $x \in F$ et $x \notin A_{i_0}$.

Soit $i \in I$.

Donc d'après $(\star_2)$, on a $x \in F - A_i$.

Donc $x \in F$ et $x \notin A_i$.

Donc $x \notin A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \notin A_i$.

Donc $\forall i \in I, \text{non}(x \in A_i)$.

Donc $\text{non}(\exists i \in I, x \in A_i)$.

Donc $\text{non}\left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$.

Ainsi, $x \in F$ et $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$.

Donc $x \in F - \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Donc si $x \in \bigcap_{i \in I} (F - A_i)$, alors $x \in F - \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Finalement, $x \in F - \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ si et seulement si $x \in \bigcap_{i \in I} (F - A_i)$.

Donc $\forall x \in E, \left(x \in F - \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \iff x \in \bigcap_{i \in I} (F - A_i)\right)$.

Donc $\boxed{F - \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} (F - A_i)}$.

2

Soit $x \in E$.

Raisonnons par doubles implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in F - \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.

Donc $x \in F$ et $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$.

Donc $x \in F$ et non$\left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i\right)$.

Donc $x \in F$ et non$(\forall i \in I, x \in A_i)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc $x \in F$ et $\exists i \in I$, non$(x \in A_i)$.

Donc $x \in F$ et $\exists i \in I, x \notin A_i$.

Ainsi, $x \in F$ et il existe $i_0 \in I$ tel que $x \notin A_{i_0}$.

Donc $x \in F$ et $x \notin A_{i_0}$.

Donc $x \in F - A_{i_0}$.

Donc il existe $i \in I$ tel que $x \in F - A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} (F - A_i)$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc si $x \in F - \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$, alors $x \in \bigcup_{i \in I} (F - A_i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup_{i \in I} (F - A_i)$.

Donc il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in F - A_{i_0}$ d'après la prop. 162 p. 227.

Donc $x \in F - A_{i_0}$.

Donc $x \in F$ et $x \notin A_{i_0}$.

Ainsi, il existe $i \in I$ tel que $x \notin A_i$.

Donc $\exists i \in I, x \notin A_i$.

Donc $\exists i \in I$, non$(x \in A_i)$.

Donc non$(\forall i \in I, x \in A_i)$.

Donc non$\left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i\right)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$.

Ainsi, $x \in F$ et $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$.

Donc $x \in F - \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.

Donc si $x \in \bigcup_{i \in I} (F - A_i)$, alors $x \in F - \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.

Finalement, $x \in F - \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$ si et seulement si $x \in \bigcup_{i \in I} (F - A_i)$.

Donc $\forall x \in E, \left(x \in F - \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \iff x \in \bigcup_{i \in I} (F - A_i)\right)$.

Donc $\boxed{F - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(F - A_i)}$.

3

On a $\complement_E \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = E - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \underset{1}{=} \bigcap_{i\in I}(E - A_i) = \bigcap_{i\in I} (\complement_E A_i)$.

Donc $\boxed{\complement_E \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (\complement_E A_i)}$.

4

On a $\complement_E \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = E - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \underset{2}{=} \bigcup_{i\in I}(E - A_i) = \bigcup_{i\in I} (\complement_E A_i)$.

Donc $\boxed{\complement_E \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (\complement_E A_i)}$.

**CQFD**.

## Proposition 181 (Intersection de familles et images)

Soient $E$, $F$, $I$ et $J$ quatre ensembles non vides. Soit $f : E \to F$.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille **de parties** de $E$ indexée par $I$.

Soit $(B_j)_{j\in J}$ une famille **de parties** de $F$ indexée par $J$.

1 $f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

2 $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

3 $f$ est injective si et seulement si pour tout ensemble $K$ non vide et toute famille $(C_k)_{k\in K}$ **de parties** de $E$ indexée par $K$, on a $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\rightarrow}(C_k)$.

*Démonstration*

1

Soit $x \in E$.

On a les équivalences suivantes :

$$x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)$$

$\iff x \in \bigcap_{j \in J} B_j$ par définition de $f^{\leftarrow}$

$\iff \forall j \in J, f(x) \in B_j$ d'après la prop. 173 p. 250

$\iff \forall j \in J, x \in f^{\leftarrow}(B_j)$ par définition de $f^{\leftarrow}$

$\iff x \in \bigcap_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$ d'après la prop. 173 p. 250

Ainsi, on a $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) \iff x \in \bigcap_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

On a donc $\forall x \in E, \left(x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) \iff x \in \bigcap_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)\right)$.

Ainsi, on a $\boxed{f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)}$.

(2)

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.

Il existe donc $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ tel que $y = f(x)$ par définition de $f^{\rightarrow}$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_1)$ cette dernière assertion.

Soit $i \in I$.

On a $x \in A_i$ d'après $(\star_1)$.

Or, on sait que $y = f(x)$.

On a donc $y \in f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $\forall i \in I, y \in f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $y \in \bigcap_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$, alors $y \in \bigcap_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $\forall y \in F, \left(y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \Rightarrow y \in \bigcap_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)\right)$.

Et donc $\boxed{f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)}$.

(3)

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f$ est injective.

Soient $K$ un ensemble non vide et $(C_k)_{k \in K}$ une famille de parties de $E$ indexée par $K$.

Soit $y \in F$.

Supposons que $y \in \bigcap_{k \in K} f^{\rightarrow}(C_k)$.

Alors $\forall k \in K, y \in f^{\rightarrow}(C_k)$ d'après la prop. 173 p. 250.

Notons $(\star_2)$ cette dernière assertion.

Comme $K$ est non vide, il existe $k_0 \in K$.

D'après $(\star_2)$, on a donc $y \in f^{\rightarrow}(C_{k_0})$.

Il existe donc $x \in C_{k_0}$ tel que $y = f(x)$ par définition de $f^{\rightarrow}$.

Montrons que $x \in \bigcap_{k \in K} C_k$.

Soit $k \in K$.

D'après $(\star_2)$, on a donc $y \in f^{\rightarrow}(C_k)$.

Il existe donc $x' \in C_k$ tel que $y = f(x')$ par définition de $f^{\rightarrow}$.

Or, on a $y = f(x)$.

Donc $f(x) = f(x')$.

Mais on sait que $f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = x'$.

Or, $x' \in C_k$.

Donc $x \in C_k$.

Donc $\forall k \in K, x \in C_k$.

Donc $x \in \bigcap_{k \in K} C_k$ d'après la prop. 173 p. 250.

Or, $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right)$.

Donc si $y \in \bigcap_{k \in K} f^{\rightarrow}(C_k)$, alors $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right)$.

Donc $\forall y \in F, \left(y \in \bigcap_{k \in K} f^{\rightarrow}(C_k) \Rightarrow y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right)\right)$.

Donc $\bigcap_{k \in K} f^{\rightarrow}(C_k) \subseteq f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right)$.

Or, on a $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right) \subseteq \bigcap_{k \in K} f^{\rightarrow}(C_k)$ d'après 2.

Donc $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right) = \bigcap_{k \in K} f^{\rightarrow}(C_k)$.

Donc $\forall K \neq \emptyset, \forall (C_k)_{k \in K} \in \mathcal{P}(E)^K, f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right) = \bigcap_{k \in K} f^{\rightarrow}(C_k)$.

Donc $\boxed{\text{si } f \text{ est injective, alors } \forall K \neq \emptyset, \forall (C_k)_{k \in K} \in \mathcal{P}(E)^K, f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right) = \bigcap_{k \in K} f^{\rightarrow}(C_k).}$

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que pour tout ensemble $K$ non vide, et toute famille $(C_k)_{k\in K}$ de parties de $E$ indexée par $K$, on ait $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\rightarrow}(C_k)$.

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

Posons $K = \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$ puis $C_\emptyset = A$ et $C_{\{\emptyset\}} = B$ pour ainsi former $(C_k)_{k\in K}$ une famille de parties de $E$ indexée par $K$.

On a alors $\bigcap_{k\in K} C_k = C_\emptyset \cap C_{\{\emptyset\}} = A \cap B$ d'après la prop. 174 p. 251.

Pour la même raison, on a $\bigcap_{k\in K} f^{\rightarrow}(C_k) = f^{\rightarrow}(C_\emptyset) \cap f^{\rightarrow}(C_{\{\emptyset\}}) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

Or, par hypothèse on a $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\rightarrow}(C_k)$.

On a donc $f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

Donc $\forall A \subseteq E, \forall B \subseteq E, f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

Donc $f$ est injective d'après la prop. 128 p. 163.

Donc $\boxed{\text{si } \forall K \neq \emptyset, \forall (C_k)_{k\in K} \in \mathcal{P}(E)^K, f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\rightarrow}(C_k), \text{ alors } f \text{ est injective}}$.

**CQFD**.

# 4 Union disjointe

## 4.1 Union disjointe de deux ensembles

## 4.2 Union disjointe d'une famille d'ensembles

# 5 Produit cartésien d'une famille d'ensembles

Chapitre 5

# Partitions et relations d'équivalences

## Sommaire

# 1 Partitions

**Définition 69 (Recouvrements et sous-recouvrements)**

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $I$ un ensemble.
Soit $F \subseteq E$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$ indexée par $I$.

(1) On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement** de $F$ si et seulement si $F \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
On dit alors que $(A_i)_{i\in I}$ **recouvre** $F$.

(2) On appelle **sous-recouvrement** de $(A_i)_{i\in I}$ pour $F$ toute sous-famille $(A_i)_{i\in J}$ de $(A_i)_{i\in I}$ qui est aussi un recouvrement de $F$.

**Définition 70 (Partition indexée d'un ensemble)**

Soient $E$ et $I$ deux ensembles non vides.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$ indexée par $I$.

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition indexée** de $E$ si et seulement si :

(1) $E = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$

(2) Les membres de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints

(3) $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$

**Définition 71 (Partition d'un ensemble)**

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de partie des $E$.

On dit que $\mathcal{F}$ est une **partition (non indexée)** de $E$ si et seulement s'il existe un ensemble $I$ non vide et une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $E$ indexée par $I$ tels que :

(1) $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de $E$

(2) $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$.

On dit alors que $\mathcal{F}$ est la partition **associée** à $(A_i)_{i\in I}$.

## Proposition 182 (Propriétés des partitions)

Soit $E$ un ensemble non vide. Soit $\mathcal{F}$ une partition de $E$.

(1) $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A = E$.
(2) $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
(3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

*Démonstration*

Comme $\mathcal{F}$ est une partition de $E$, il existe une partition indexée $(B_i)_{i\in I}$ de $E$ telle que $\mathcal{F} = \{B_i \mid i \in I\}$.

♦ (1)

Comme $(B_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de $E$, on a $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = E$.

Donc $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup \{B_i \mid i \in I\} = \bigcup\limits_{i\in I} B_i = E$.

Donc $\boxed{\bigcup\limits_{A\in\mathcal{F}} A = E}$.

♦ (2)

Notons $B = (B_i)_{i\in I}$.

On a alors $\mathcal{F} = \{B_i \mid i \in I\} = \{B(i) \mid i \in I\} = \mathrm{im}(B) = B^{\rightarrow}(I)$.

Comme $(B_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de $E$, on a $I \neq \emptyset$.

Donc $B^{\rightarrow}(I) \neq \emptyset$ d'après la prop. 125 p. 160.

Donc $\boxed{\mathcal{F} \neq \emptyset}$.

♦ (3)

Soit $A \in \mathcal{F}$.

On sait que $\mathcal{F} = \{B_i \mid i \in I\}$.

Donc il existe $i_0 \in I$ tel que $A = B_{i_0}$.

Or, $(B_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de $E$.

Donc on sait que $\forall i \in I, B_i \neq \emptyset$.

Donc en particulier, $B_{i_0} \neq \emptyset$.

Donc $A \neq \emptyset$.

Donc $\forall A \in \mathcal{F}, A \neq \emptyset$.

Donc $\boxed{\emptyset \notin \mathcal{F}}$.

**Remarque 8**

Pour $E$ un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une partition dérangée de $E$, il est "facile" de concevoir une partition rangée $(A_i)_{i\in I}$ telle que $\mathcal{F}$ lui soit associée.

En effet, il suffit de prendre $I = \mathcal{F}$ et pour tout $i \in I$, poser $A_i = i$.

La proposition suivante démontre que la famille obtenue est bien une partition rangée.

**Proposition 183 (Équivalence entre partitions et partitions indexées)**

Soient $E$ un ensemble non vide, et $\mathcal{F}$ une partition de $E$.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ la famille associée à $\mathcal{F}$, c'est-à-dire que $I = \mathcal{F}$ et pour tout $i \in I$, $A_i = i$.

Alors $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de $E$.

De plus, la partition dérangée associée à $(A_i)_{i\in I}$ est $\mathcal{F}$ elle-même.

*Démonstration*

Commençons par montrer les trois conditions de la définition qui font de $(A_i)_{i\in I}$ est une partition rangée de $E$.

Pour cela, montrons tout d'abord que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$. On sait que $\mathcal{F}$ une partition dérangée de $E$.

A ce titre, il existe une partition rangée $(B_j)_{j\in J}$ de $E$ telle que $\mathcal{F} = \{B_j \mid j \in J\}$.

Or, on a aussi $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 157 p. 221.

Donc $\{A_i \mid i \in I\} = \{B_j \mid j \in J\}$.

Donc $\bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup \{B_j \mid j \in J\}$.

Or, $\bigcup \{B_j \mid j \in J\} = \bigcup\limits_{j\in J} B_j$ par définition de $\bigcup$.

De même, $\bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Donc $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{j\in J} B_j$.

Or, $\bigcup\limits_{j\in J} B_j = E$ car $(B_j)_{j\in J}$ est une partition rangée de $E$.

Donc $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$.

Montrons à présent que les membres de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.

Soit $i \in I$.

Soit $i' \in I$.

Supposons que $i \neq i'$.

On sait par définition que $A_i = i$ et $A_{i'} = i'$.

Donc $A_i \neq A_{i'}$.

Donc $i \neq i' \Rightarrow A_i \neq A_{i'}$.

Donc $\forall i' \in I, i \neq i' \Rightarrow A_i \neq A_{i'}$.

Donc $\forall i \in I, \forall i' \in I, i \neq i' \Rightarrow A_i \neq A_{i'}$.

Donc les membres de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.

Montrons enfin que $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$.

Soit $i \in I$.

Par définition, $I = \mathcal{F}$.

Donc $i \in \mathcal{F}$.

Or, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ d'après la prop. 182 p. 279.

Donc $i \neq \emptyset$.

Or, par définition, $A_i = i$.

Donc $A_i \neq \emptyset$.

Donc $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$.

On vient donc de démontrer que $\boxed{(A_i)_{i\in I} \text{ est une partition indexée de } E}$.

Enfin, $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 157 p. 221.

Donc $\boxed{\mathcal{F} \text{ est bien la partition associée à } (A_i)_{i\in I}}$.

**CQFD**.

**Proposition 184 (Recouvrements, partitions et images)**

# 2 Relations d'équivalences

# 3 Ensembles quotients

# Bibliographie

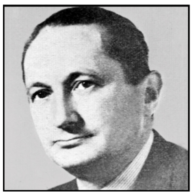
[1] Laurent Schwartz. Analyse i : Théorie des ensembles et topologie, 1991.

# Index

# Mathématiciens

De Morgan (Auguste) 32

1806 - 1871



Kuratowski (Kazimierz) 44

1896 - 1980

Venn (John) 20

1834 - 1923

Zermelo (Ernst) 122

1871 - 1953